ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
8184	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Az adatok megfelelő képletbe történő behelyettesítéséért 1 pont jár.

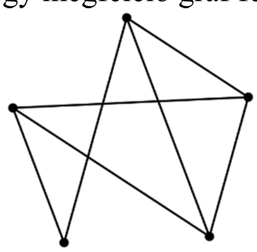
2.		
20 (°C)	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A *B* halmaznak 1 olyan eleme van, amely az *A*-nak nem eleme,	1 pont	*Ez a 2 pont jár a feltételeknek megfelelő Venn-diagram felrajzolásáért.*
és 2 olyan eleme van, amely az *A*-nak is eleme.	1 pont	
Így összesen 3 eleme van a *B* halmaznak.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy konkrét példa segítségével oldja meg a feladatot, akkor maximális pontszámot kaphat.

4.		
(8! =) 40320	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A 8! felírásáért 1 pont jár.

5.		
Egy megfelelő gráf felrajzolása, például:  (A gráfban a csúcsok fokszáma 2, 3, 3, 3, 3.)	2 pont	*Nem egyszerű gráf is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$\frac{3}{10}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A) hamis B) igaz C) igaz	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
Legfeljebb 3 órát a megkérdezettek 15 + 28 + 34 = 77%-a tölt a gép előtt.	1 pont	
$1200 \cdot 0{,}77 =$	1 pont	
= 924 (fő tölt naponta legfeljebb 3 órát a gép előtt.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$2x - 5y = 3$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$a_4 = a_1 + 3d = 72$ és $a_6 = a_1 + 5d = 64$	1 pont	*A hatodik és a negyedik tag különbsége: $2d = -8$.*
A két egyenletet egymásból kivonva, vagy az egyik ismeretlent az egyik egyenletből kifejezve és a másikba helyettesítve oldható meg az egyenletrendszer.	1 pont	
$d = -4$	1 pont	
$a_1 = 84$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat első hat tagjának helyes felsorolásával adja meg válaszát, akkor maximális pontszámot kap.

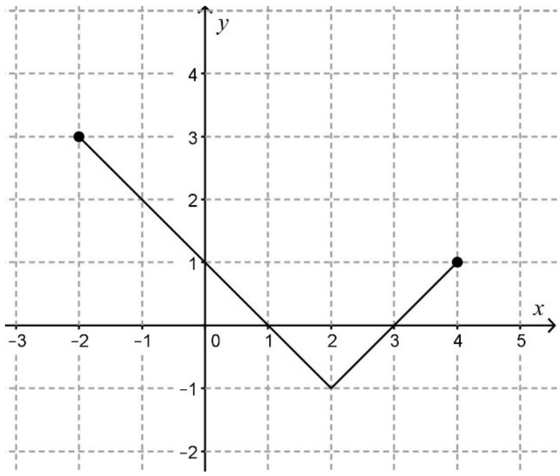
11.		
$x = \frac{3\pi}{4}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: 1 pont jár, ha a vizsgázó megoldását fokban (helyesen) adja meg, vagy ha nem az adott intervallumon oldja meg (helyesen) az egyenletet.

12.		
Az *ABC* és *ADE* háromszögek hasonlók (mivel szögeik páronként egyenlők).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{x}{1{,}5} = \frac{x+7}{5}$	1 pont	
$5x = 1{,}5x + 10{,}5$	1 pont	
Az *AC* szakasz hossza: $x = 3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)		
$f(-1)=2$	2 pont	*$f(-1)=\lvert -1-2\rvert -1$ felírásáért 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
	3 pont	*A vizsgázó az $x \mapsto \lvert x\rvert$ függvény eltoltját ábrázolja (1 pont), melynek minimumpontja a (2;–1) pont (1 pont), és az értelmezési tartományt a megadott intervallumra szűkítette (1 pont).*
A függvény (szigorúan) monoton csökken, ha $(-2\leq)\, x\leq 2$,	1 pont	*Nyílt intervallum, illetve más helyes jelölés is elfogadható.*
(szigorúan) monoton növekszik, ha $2\leq x\,(\leq 4)$.	1 pont	
A függvénynek (abszolút) maximuma van az $x = –2$ helyen, ennek értéke 3,	1 pont	*Ha a vizsgázó a szélsőérték helye és értéke helyett a megfelelő pont(ok) koordinátáit adja meg helyesen, akkor 1 pontot kapjon.*
illetve (helyi és abszolút) minimuma van az $x = 2$ helyen, ennek értéke –1.	1 pont	
A függvénynek az $x = 1$ és az $x = 3$ helyeken zérushelye van.	1 pont	
A függvény értékkészlete: [–1; 3].	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**10 pont**	

14. a)		
A törtek közös nevezője $2(x + 2)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A törteket közös nevezőre hozva és a nevezővel beszorozva) $x+2+(x-2)\cdot 2=2x+1$.	1 pont	
Rendezve: $3x-2=2x+1$.	1 pont	
Ebből $x = 3$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozva az $x \neq -2$ feltétel mellett.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
$\log_3 81=4$	1 pont	$\log_3 81(x^2-1)=5$
$\log_3 (x^2-1)=1$	1 pont	$\log_3 81(x^2-1)=\log_3 243$
$x^2-1=3$	1 pont	
Az egyenlet megoldásai: $x_1=2$, $x_2=-2$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozva az $x^2-1>0$ feltétel mellett.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

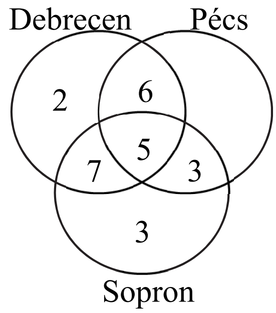
15. a)		
A *D* szektor 1. zónájába jegyet váltók számát jelölje *x*, ekkor az 1. zónába jegyet vásárlók száma: $69 + 96 + 85 + x = 250 + x$.	1 pont	*Az 1. zónába összesen* $4 \cdot 82 = 328$ *jegyet vásároltak,*
$\frac{250+x}{4} = 82$	1 pont	*ebből az A, B és C szektorokba összesen 250-et.*
A *D* szektor 1. zónájába jegyet váltók száma $(x =)$ 78.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
Az *A* és a *B* szektorban összesen 595 jegy fogyott.	1 pont	
Ezek szerint a *C* és a *D* szektorba adták el a többi (1102 – 595 =) 507 jegyet.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott néző jegye a *C* vagy a *D* szektorba szól: $\frac{507}{1102}$ $(\approx 0{,}46)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
Jelölje a *C* szektor 2. zónájába eladott jegyek számát *y*, a 3. zónájába eladott jegyek számát *z*. Ekkor egyrészt $85 + y + z = 295$.	1 pont	
Másrészt a jegyárak alapján $85 \cdot 3200 + y \cdot 2900 + z \cdot 1500 = 752\,200$.	1 pont	
Az egyenletrendszert behelyettesítéssel (vagy más módszerrel) megoldva:	1 pont	
$y = 118$, $z = 92$.	2 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
A *C* szektor 2. zónájába 118, a 3. zónájába 92 jegyet adtak el.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)

Abból kiindulva, hogy öten mindhárom helyszínre szívesen utaznának, meghatározható azon diákok száma, akik pontosan két városba mennének el: Pécsre vagy Debrecenbe hatan, Debrecenbe vagy Sopronba heten, Pécsre vagy Sopronba hárman.	2 pont	*A feladat szövege alapján kitöltött Venn-diagram:* 
Két olyan tanuló van, aki csak Debrecenre,	1 pont	
és három olyan, aki csak Sopronra szavazott.	1 pont	
Mivel az osztályban összesen 30-an vannak, csak Pécsre 4 tanuló szeretne menni.	1 pont	*2 + 7 + 3 = 12 olyan tanuló van, aki nem szeretne Pécsre menni.*
Így összesen (5 + 6 + 3 + 4 =) 18-an vannak azok, akik szívesen kirándulnának Pécsre.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b)

A középpontok összekötésével egy 3 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget kapunk.	1 pont	*Ez a pont jár egy olyan ábra elkészítéséért, melyen a vizsgázó feltünteti ezeket az információkat.*
A szabályos háromszög területe: $T_{\text{háromszög}} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ($\approx 3{,}90$ cm^2).	1 pont	
A keresett terület háromszögön kívüli részei olyan egybevágó körszeletek, melyek sugara 3 cm, középponti szöge 60°.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Egy 60°-os középponti szögű, 3 cm sugarú körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot 60}{360}$ ($\approx 4{,}71$ cm^2).	1 pont	
$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{háromszög}}$ ($\approx 4{,}71 - 3{,}90 \approx 0{,}81$ cm^2)	1 pont	*A keresett terület:* $T = 3 \cdot T_{\text{körcikk}} - 2 \cdot T_{\text{háromszög}}$
A keresett terület: $T = T_{\text{háromszög}} + 3 \cdot T_{\text{körszelet}} \approx 6{,}33$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)		
30 tanuló közül hármat $\binom{30}{3}$ (= 4060)-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
A Debrecent megjelölő 20 diákból ki kell választanunk kettőt. Ezt $\binom{20}{2}$ (= 190)-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A harmadik diákot a többi 10 közül kell kiválasztanunk, ez 10 lehetőséget jelent.	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{20}{2} \cdot 10$ (= 1900).	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{1900}{4060} \approx 0{,}47$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a) első megoldás		
(Az ABC háromszög C csúcsánál fekvő belső szögét jelölje γ. A szinusztétel alapján) $\frac{37}{41} = \frac{\sin\gamma}{\sin 60°}$.	1 pont	
Ebből ($\sin\gamma \approx 0{,}7815$, tehát) $\gamma_1 \approx 51{,}4°$.	1 pont	
$\gamma_2 \approx 128{,}6°$, de ez az érték az adott feladatnak nem megoldása (mert 60° + 128,6° > 180°).	1 pont	
A háromszög B csúcsánál lévő belső szög közelítőleg 68,6°.	1 pont	
(A szinusztétel felhasználásával) $\frac{AC}{41} = \frac{\sin 68{,}6°}{\sin 60°}$.	1 pont	*Koszinusztétellel:* $AC^2 = 37^2 + 41^2 - 2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot \cos 68{,}6°$
$AC \approx 44$ (egység).	1 pont	
A háromszög kerülete tehát közelítőleg 122 (egység).	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

17. a) **második megoldás**		
(Az ABC háromszög AC oldalának hosszát jelölje x. A koszinusztétel alapján) $41^2 = x^2 + 37^2 - 2 \cdot x \cdot 37 \cdot \cos 60°$.	2 pont	
Rendezve: $x^2 - 37x - 312 = 0$.	1 pont	
$x_1 \approx -7$	1 pont	
Ez nem lehet egy háromszög oldalának a hossza.	1 pont	
$x_2 \approx 44$ (egység)	1 pont	
A háromszög kerülete tehát közelítőleg 122 (egység).	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

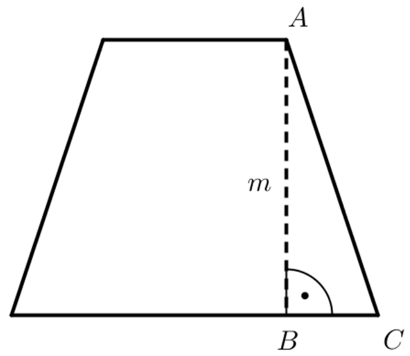
17. b)		
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$	1 pont	$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$ *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$	1 pont	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CE} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$	1 pont	
Így tehát $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{CD}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c)		
Az A-ból a B pontba egyféleképpen,	1 pont	
a C-be és a D-be kétféleképpen juthatunk el.	1 pont	
Az A-ból az E-be 1 + 2 = 3 útvonal vezet,	1 pont	
az F-be 1 + 2 + 2 = 5 úton juthatunk el.	1 pont	
A G-be D-ből, E-ből vagy F-ből tudunk eljutni,	1 pont	
így összesen 2 + 3 + 5 = 10 különböző útvonal vezet A-ból G-be.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: A tíz különböző útvonal: ABCDEG, ABCDFG, ABCDG, ABCFG, ABEG, ACDEG, ACDFG, ACDG, ACFG, AFG.
Ha a vizsgázó a válaszát az útvonalak felsorolásával adja meg, akkor az alábbi táblázat és az utána következő megjegyzés alapján kell a feladatra adott pontszámot megállapítani.

Helyes útvonalak száma	*Ezekért járó pont*
10	*6*
8-9	*5*
6-7	*4*
4-5	*3*
2-3	*2*
1	*1*

Minden egyes hibás vagy többszörösen felsorolt útvonal megadása 1 pont levonásával jár (úgy, hogy a feladatra kapott összpontszám nem lehet negatív).

18. a)		
A kannában lévő tea alakja olyan csonkakúp, amely fedőkörének átmérője a kanna alap-, illetve fedőköre átmérőjének számtani közepe,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
vagyis 13 cm.	1 pont	
(A kannában lévő tea térfogatának kiszámításához használt adatok:) alapkör sugara 9 cm, fedőkör sugara 6,5 cm,	1 pont	*Ez a pont csak akkor jár, ha a vizsgázó mindkét átmérőből helyesen számolta ki a sugarat.*
alkotó hossza 7 cm.	1 pont	
(A tengelymetszet, ahol *m* a tea magassága:)  Az ábrán a *BC* távolság a sugarak különbsége: 2,5 cm.	1 pont	
(Pitagorasz-tétellel:) $m=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{7^2-2{,}5^2}$ ($\approx 6{,}54$ cm).	1 pont	
A tea térfogata közelítőleg: $\frac{6{,}54\cdot\pi}{3}\cdot(9^2+6{,}5^2+9\cdot6{,}5)\approx$	1 pont	
≈ 1245 (cm^3).	1 pont	
A kannában tehát körülbelül 12,5 dl tea van.	1 pont	*Más, ésszerűen és helyesen kerekített eredmény is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a kanna űrtartalmát (közelítőleg 18 dl) helyesen számolja ki, akkor erre 5 pontot kapjon.

18. b)		
A negyedóra 15 perccel egyenlő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T_{\text{tea}}(15)=23+56\cdot0{,}96^{15}\approx$	1 pont	
$\approx 53{,}4$ (°C) lesz a tea hőmérséklete.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)		
Megoldandó a $37 = 23 + 56 \cdot 0{,}96^t$ exponenciális egyenlet.	1 pont	
Rendezve: $0{,}25 = 0{,}96^t$.	1 pont	
$\lg 0{,}25 = \lg 0{,}96^t$	1 pont	$t = \log_{0,96} 0{,}25$
$\lg 0{,}25 = t \cdot \lg 0{,}96$	1 pont	
$t \approx 34$ perc alatt hűl a tea 37°C-osra.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a tea hőmérsékletét percről percre (ésszerű és helyes kerekítésekkel) kiszámítja, és ez alapján jó választ ad, akkor maximális pontszámot kaphat.