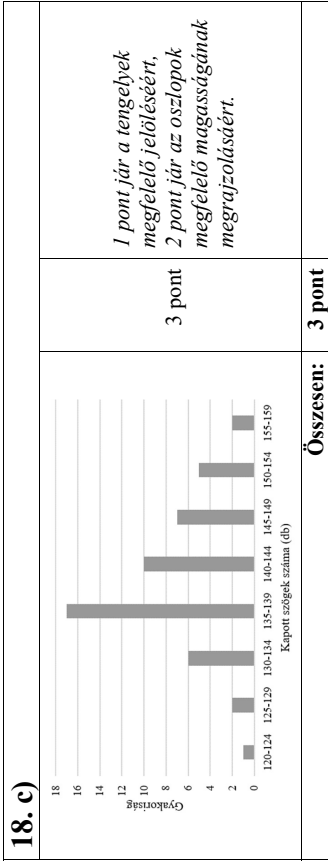


18. b)	
(Kiszámoljuk egy szög térfogatát.) A szög fejének térfogata: $V_1 = \frac{1 \cdot \pi}{3} \cdot (2,5^2 + 2,5 \cdot 1 + 1^2) = 3,25\pi \approx 10,21 \text{ (mm}^3\text{)}.$	1 pont
A hengeres rész térfogata: $V_2 = l^2 \cdot \pi \cdot 25 = 25\pi \approx 78,54 \text{ (mm}^3\text{)}.$	1 pont
A szög hegyének térfogata: $V_3 = \frac{l^2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} = \frac{5}{6} \pi \approx 2,62 \text{ (mm}^3\text{)}.$	1 pont
Egy szög térfogata ezek összege, azaz $V \approx 91,37 \text{ mm}^3.$	1 pont
$7,8 \text{ g/cm}^3 = 0,0078 \text{ g/mm}^3$	1 pont
Egy szög tömege: $91,37 \cdot 0,0078 = 0,713 \text{ g}.$	1 pont
$10 \text{ dkg} = 100 \text{ g}$	1 pont
$100 \text{ gramm szög} \frac{100}{0,713} \approx 140 \text{ darab}.$	1 pont
Összesen:	8 pont

Megjegyzés: Ha a vizsgáló a térfogatok számítása során a testek átmérőjét tekinti sugárnak, és ezzel helyesen számol, akkor ezért összesen legfeljebb 1 pontot veszíten.



18. d)			
Az osztályközepcekkel a táblázat:			
kapott szögek száma (db)	gyakorisága	kapott szögek száma (db)	gyakorisága
122	1	142	10
127	2	147	7
132	6	152	5
137	17	157	2
A medián (a 25. és 26. adat átlaga) 137 db,		1 pont	
az átlag $\frac{1 \cdot 122 + 2 \cdot 127 + \dots + 2 \cdot 157}{50} = 140,4 \text{ db.}$		2 pont	
Összesen:		4 pont	

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kippalással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy a **hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kippálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kippálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadjuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenerértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, ha csak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

17. a)		
Egy megfelelő gráf, például:		2 pont
Nem egyszerű gráf is elfogadható.		
Összesen:	2 pont	

17. b)		
Ha lenne ilyen gráf, akkor abban a csúcsok fokszámának összege $(3 \cdot 5 =) 15$ lenne.	1 pont	
Mivel egy gráfban a csúcsok fokszámának összege nem lehet páratlan,	1 pont	
ezért ilyen gráf nincs.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

17. c)		
$\overline{AD} = -\overline{DA}$	1 pont*	$\overline{AB} = \overline{DB} - \overline{DA}$
$\overline{DB} = 2 \cdot \overline{DE}$	1 pont*	
$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = -\overline{DA} + 2 \cdot \overline{DE}$	1 pont	$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{DE} - \overline{DA}$
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.

17. d)		
A B pont első koordinátáját az AB egyenes egyenletébe helyettesítve $2 \cdot 3 - 5y = -4$,	1 pont	
amiből $y = 2$, azaz $B(3; 2)$ az egyik csúcs.	1 pont	
(Az A pont az AB és AD egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja meg.)		
Az első egyenletből x-et kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve: $3 \cdot \frac{5y-4}{2} - 2y = -6$.	2 pont	Az első egyenlet 3-szorosából a második egyenlet $-1y = 0$.
Az egyenletet rendezve: $y = 0$.	1 pont	
Innen $x = -2$, tehát $A(-2; 0)$ a másik csúcs.	1 pont	
(Az AC szakasz és a BD szakasz E felezőpontja meg-egyezik.) Az AC szakasz felezőpontja $E(1,5; 2,5)$.	1 pont	$\overline{BC} = \overline{AD} = (2; 3)$
Mivel $1,5 = \frac{d_1 + 3}{2}$ és $2,5 = \frac{d_2 + 2}{2}$,		
így a $D(d_1; d_2)$ pont koordinátái $(0; 3)$.	2 pont	Így a D pont helyvektora $(-2; 0) + (2; 3) = (0; 3)$, ezek egyben a D pont koordinátái.
Összesen:	9 pont	

18. a)		
Egy szög teljes hossza $1 + 25 + 2,5 = 28,5$ mm.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

16. d) második megoldás		
A visszatevés nélküli húzás esetén $\frac{1}{8}$ annak a valószínűsége, hogy az első húzás „Föld”. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás nem Föld, de a második húzás Föld: $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$.	1 pont	
(Mivel egymást kizáró eseményekről van szó, így) a kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\frac{2}{8}$.	1 pont	
Visszatevéses húzás esetén $\frac{1}{8}$ annak a valószínűsége, hogy az első húzás Föld. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás nem Föld, de a második húzás Föld: $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$.	1 pont*	Annak a valószínűsége, hogy sem az első, sem a második húzás nem Föld: $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{49}{64}$.
Visszatevés esetén tehát a kérdéses esemény valószínűsége $\frac{1}{8} + \frac{7}{64} \approx 0,234$.	1 pont*	Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik húzás Föld: $1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$.
Tehát visszatevés nélküli húzás esetén nagyobb a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik cédulán a Föld neve szerepel.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzések:

1. A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.		
Visszatevéses húzás esetén annak a valószínűsége, hogy az első vagy a második húzás Föld: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$,	1 pont	
viszont ekkor kétszer számoljuk azt, amikor mindkét húzás Föld, aminek a valószínűsége $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.	1 pont	
Visszatevés esetén tehát a kérdéses esemény valószínűsége $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \approx 0,234$.	1 pont	

2. Az alábbi gondolatmenet is teljes pontszámot ér.
Mindkét esetet tekinthetjük úgy, hogy kétszer húzunk egymás után a cédulák közül. Ha az első kihúzott cédulán a Föld szerepel, akkor mindegy, hogy melyik fajta húzást választjuk.
Ha az első nem Föld, akkor nyilván akkor lesz nagyobb esélyünk a másodikra Földet húzni, ha nem tesszük vissza az elsőre kihúzott cédulát, hiszen ebben az esetben kevesebb olyan cédula marad a kalapban, melyet nem kívánunk húzni.
Tehát visszatevés nélküli mintavétel esetén nagyobb a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik cédulán a Föld neve szerepel.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám nem lehet negatív.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytablázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzeit), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.
11. Az ábrák bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása mérésrel) nem elfogadható.
12. Valószínűségek megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, észszerű és helyes kerekítésekkel kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozathól sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$A \cap B = \{1; 10\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{3; 6; 15\}$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

2.		
Összesen (35 kört, azaz) 7000 métert fut az öt nap alatt.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
$x = 8$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

4.		
2^{101}	2 pont	Nem bontható.
Összesen:	2 pont	

5.		
A: hamis B: igaz C: igaz	2 pont	2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.
Összesen:	2 pont	

6.		
a) $f(12) = 1000$	1 pont	
b) $\left(\frac{x}{4} = 2, \text{ azaz} \right) x = 8$	2 pont	
Összesen:	3 pont	

7.		
$15\,000 \cdot 1,25 = 18\,750$ Ft-ra emelte a termék árát október végén a kereskedő.	1 pont	Ha az eredeti ár x , akkor a megemelt ár $1,25x$.
$15\,000 \cdot 100 = 80\%$ 18750	1 pont	$\frac{x}{1,25x} = 0,8$
Tehát 20%-os kedvezménnyel adja a terméket a kereskedő november végén.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

16. b)		
$4,2 \text{ óra} = (4,2 \cdot 60 \cdot 60 =) 15\,120 \text{ másodperc}$	1 pont	
A fény ennnyi idő alatt $15\,120 \cdot 300\,000 =$ $(= 1,512 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^5 \approx) 4,5 \cdot 10^9 \text{ km-t}$ tesz meg, tehát kb. ennnyi a Neptunusz távolsága a Naptól.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

16. c)		
A helyes bolygórend miatt 1 kedvező eset van.	1 pont	
A Merkúr és a Vénusz bolygókat kétféleképpen, a maradék 4 bolygót $4! = 24$ -féleképpen írhatja be, ez összesen $2 \cdot 24 = 48$ lehetőség (összes eset száma).	1 pont	
A kértezett valószínűség $\frac{1}{48} \approx 0,021$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

16. d) első megoldás		
Visszatevés nélküli húzás esetén (a húzási sorrend figyelembe vétele nélkül) a kedvező esetek száma 7, hiszen a Föld mellett 7 másik bolygó nevét lehet kihúzni.	1 pont	(A húzási sorrend figyelembe vételével) a kedvező esetek száma $2 \cdot 7 = 14$,
Az összes eset száma $\binom{8}{2} = 28$.	1 pont	az összes eset száma $8 \cdot 7 = 56$.
Az esemény bekövetkezésének a valószínűsége ekkor $\frac{7}{28} \cdot \frac{1}{4} = 0,25$.	1 pont	
Visszatevéses húzás esetén az összes eset száma $8^2 = 64$.	1 pont	
A kedvező esetek: vagy mindkét húzás „Föld”, ez 1 eset, vagy az egyik húzás Föld, a másik nem, ez $2 \cdot 7 = 14$ eset, összesen 15 eset.	1 pont	A kedvező esetek száma $7 \cdot 7 = 49$.
A valószínűség ekkor tehát $\frac{15}{64} (\approx 0,234)$.	1 pont	$1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$
Tehát visszatevés nélküli húzás esetén nagyobb a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik cédulán a Föld neve szerepel.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

15. a)		
Az 1998-as adat kiszámításához $x = 98$, a 2018-as adathoz $x = 118$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
$f(98) = 0,0001 \cdot 98^2 - 0,0063 \cdot 98 + 15,2 = 15,543$	1 pont	
$f(118) = 0,0001 \cdot 118^2 - 0,0063 \cdot 118 + 15,2 = 15,849$	1 pont	
2018-ban $(15,849 - 15,543 \approx) 0,3$ Celsius-fokkal volt magasabb az éves középhőmérséklet, mint 1998-ban.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

15. b)		
Megoldandó a $0,0001x^2 - 0,0063x + 15,2 = 15,42$ egyenlet ($0 \leq x \leq 119$).	1 pont	
Rendezve: $0,0001x^2 - 0,0063x - 0,22 = 0$.	1 pont	$x^2 - 63x - 2200 = 0$
Az egyenlet gyökei: $x_1 = -25$, $x_2 = 88$.	1 pont	
A -25 nem megoldása a feladatnak (a 88 pedig meg- oldása, mivel $0 \leq 88 \leq 119$).	1 pont	
(1900 + 88 =) 1988-ban volt az éves középhőmérsék- let 15,42 °C.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. c)		
Megoldandó a $15,92 \cdot 1,002^t = 16,7$ egyenlet ($0 \leq t$).	1 pont	
Rendezve: $1,002^t \approx 1,049$.	1 pont	
$t = \log_{1,002} 1,049 \left(= \frac{\lg 1,049}{\lg 1,002} \right) \approx 23,94$	2 pont	
(2018 + 24 =) 2042-ben lesz a modell alapján az éves középhőmérséklet 16,7 °C.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó évről évre észszerű (legalább két tizedesjegyre történő) helyes ke-
retítésekkel kiszámolja az éves középhőmérsékleteket, és ez alapján helyes választ ad, akkor a
teljes pontszám jár.

II. B

16. a)		
365,25 nap = 24 · 365,25 = 8766 óra	1 pont	
A Föld átlagssebessége egy teljes kör megtétele során	1 pont	
$v = \frac{s}{t} = \frac{939\,000\,000}{8766} \approx$		
$\approx 107\,118$ km/h.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8. első megoldás		
A b élhosszúságú kocka felszíne $A = 6b^2$, amiből $b = 1,5$ (cm).	1 pont	
A kétszer ekkora élű kocka éle 3 (cm), így a felszíne $(6 \cdot 3^2 =) 54$ cm ² .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8. második megoldás		
A két kocka hasonló, a hasonlóság aránya 2 : 1.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság ará- nyának négyzetével egyenlő, így a nagyobb kocka felszíne négyszerese a kisebb kocka felszínének, azaz 54 cm ² .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9.		
$\left(\frac{6!}{2! \cdot 4!} \right) = 15$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

10.		
a) $[-1; 3]$	2 pont	
b) -1 és 1	2 pont	
Összesen:	4 pont	

11.		
Az átlag 30 (perc).	1 pont	
A szórás $\sqrt{\frac{(38-30)^2 + (30-30)^2 + 2 \cdot (26-30)^2}{4}} =$ $= \sqrt{24} \approx 4,9$ (pere).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást szá- mológéppel helyesen szá- molja ki.</i>
Összesen:	3 pont	

12.		
$\frac{30}{36} \cdot \frac{5}{6} =$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

II. A

13. a)	
A gondolt számot x -szel jelölve a feladat szövege alapján: $\left(\frac{x}{2} - 5\right) \cdot 4 + 8 = x$.	2 pont
A zárójellet felbontva: $2x - 20 + 8 = x$.	1 pont
Az egyenletet rendezve: $x = 12$, azaz a gondolt szám $a = 12$.	1 pont
Ellenőrzés a szöveg alapján: a 12 fele 6, ebből 5-öt kivonva 1-et kapunk, aminek a négyszereséhez 8-at adva valóban 12-t kapunk eredményül.	1 pont
Összesen:	5 pont

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül helyes választ ad, és választ ellenőrizi, akkor ezért összesen 2 pontot kapjon.

13. b) első megoldás	
A sorozat első tagját a -val, differenciáját d -vel jelölve a szöveg alapján felírható egyenletrendszer: $\left. \begin{matrix} a + 9d = 18 \\ a + 29d = 48 \end{matrix} \right\}$.	2 pont
Az első egyenletből kifejezve a -t és a második egyenletbe helyettesítve: $18 - 9d + 29d = 48$,	1 pont
amiből $d = 1,5$,	1 pont
és $a = 4,5$.	1 pont
Összesen:	5 pont

13. b) második megoldás	
A számtani sorozat tulajdonságai miatt a sorozat harmadik tagja a differencia 20-szorosával nagyobb, mint a tizedik tagja: $a_{30} = a_{10} + 20d$.	1 pont
Tehát a sorozat differenciája: $d = (48 - 18) : 20 = 1,5$.	2 pont
A sorozat első tagja: $a_1 = 18 - 9 \cdot 1,5 = 4,5$.	2 pont
Összesen:	5 pont

14. a)	
A Pitagorasz-tétel alapján: $AC^2 + 40^2 = 41^2$,	1 pont
amiből $AC = 9$ (cm).	1 pont
A háromszög területe $T = \frac{9 \cdot 40}{2} =$	1 pont
$= 180$ cm ² ,	1 pont
azaz 1,8 dm ² .	1 pont
Összesen:	5 pont

14. b)	
A háromszög A csúcsnál lévő szögét α -val jelölve: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$,	1 pont
amiből $\alpha \approx 77,32^\circ$.	1 pont
A B csúcsnál lévő szög $\beta = 90^\circ - \alpha = 12,68^\circ$.	1 pont
Összesen:	3 pont

14. c)	
(A Thalész-tétel megfordítása miatt) a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.	1 pont*
A háromszög köré írt kör átmérője tehát $d = 41$ (cm).	1 pont*
A kör kerülete $K = d \cdot \pi = 41\pi \approx$	1 pont
≈ 129 cm a kért kerekítéssel.	1 pont
Összesen:	4 pont

Megjegyzés: A^* -gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó a köré írt kör sugarát a $T = \frac{abc}{4r}$ vagy az $a = 2r \cdot \sin \alpha$ összefüggés segítségével számítja ki.