ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$y = 79$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A lapok száma 6,	1 pont	
az élek száma 12,	1 pont	
a csúcsok száma 8.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
$(9 \cdot 5 =)$ 45	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$\left(\frac{6}{4} \cdot 7 =\right)$ 10,5 (dl)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
x $(= 0 + 1 + 2 + \ldots + 8) = 36$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$(\sqrt{25^2 - 24^2} =)$ 7 (méter)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A sorozat differenciája $(3{,}5 - 2 =)$ 1,5.	1 pont	
Megoldandó a $2 + (n - 1) \cdot 1{,}5 = 80$ egyenlet.	1 pont	
Ebből $n - 1 = 52$,	1 pont	
azaz a 80 a sorozat 53. tagja.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
A vásárlók száma hónapról hónapra egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 3400, hányadosa pedig 1,07.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A sorozat 13. tagját kell kiszámítani.	1 pont	
2020 januárjában $3400 \cdot 1{,}07^{12} \approx$	1 pont	
≈ 7700 vásárlója volt az oldalnak a kért kerekítéssel.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

9.		
A: hamis B: igaz C: hamis	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$\frac{6}{25} = 0{,}24$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Például 360°.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
A hat mérkőzésen összesen $6 \cdot 75$ pontot kell szerezniük.	1 pont	$\frac{77+60+83+73+90+x}{6} =$ $= 75$
Ennek eléréséhez a hatodik mérkőzésen $6 \cdot 75 - (77 + 60 + 83 + 73 + 90) =$	1 pont	
$= 67$ pontot kell szerezniük.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
A zérushelyek: $x = -1$ és $x = 3$.	2 pont	
A maximum helye $x = 1$,	1 pont	
a maximum értéke $f(1) = 2$.	1 pont	
Az f értékkészlete: $[-3; 2]$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b)		
$m = -1$	2 pont	
$b = 3$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

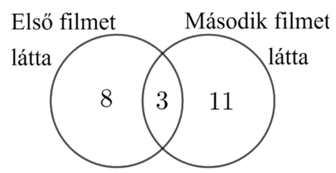
13. c)		
Az egyenlőtlenség megoldása: $-2 \leq x < 0$,	2 pont	
valamint $2 < x \leq 6$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a)		
Az egyenlet mindkét oldalát a törtek közös nevezőjével szorozva: $6(x - 2) + 6(x - 3) = 5(x - 3)(x - 2)$.	1 pont	
A zárójeleket felbontva és az egyenletet rendezve: $5x^2 - 37x + 60 = 0$.	2 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 5$ és $x_2 = 2{,}4$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

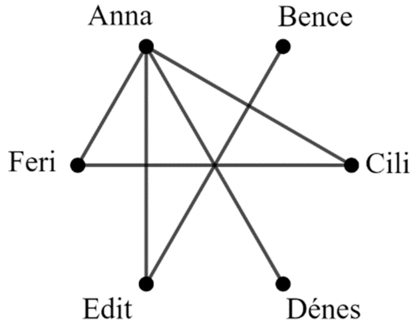
14. b)		
(A hatványozás azonosságainak felhasználásával:) $7^2 \cdot 7^x - 7 \cdot 7^x = 2058$.	1 pont	
$42 \cdot 7^x = 2058$	1 pont	
$7^x = 49$ $(= 7^2)$	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:) $x = 2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a) **első megoldás**		
(Ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, akkor) a 13 lányból 2-t $\binom{13}{2}$-féleképpen tudunk kiválasztani (kedvező esetek száma).	1 pont	*A sorrend figyelembevételével a kedvező esetek száma* $13 \cdot 12$,
A 32 diákból 2-t $\binom{32}{2}$-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	*az összes eset száma pedig* $32 \cdot 31$.
A kérdéses valószínűség: $\dfrac{\binom{13}{2}}{\binom{32}{2}} =$	1 pont	$\dfrac{13 \cdot 12}{32 \cdot 31} =$
$= \dfrac{78}{496} \approx 0{,}157$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a) **második megoldás**		
Annak valószínűsége, hogy elsőre lányt választunk: $\dfrac{13}{32}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy másodikra lányt választunk (feltéve, hogy elsőre lányt választottunk): $\dfrac{12}{31}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\dfrac{13}{32} \cdot \dfrac{12}{31} =$	1 pont	
$= \dfrac{156}{992} \approx 0{,}157$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

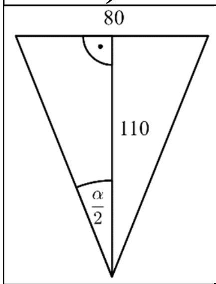
15. b)		
Az első filmet látta, a másodikat nem: $11 - 3 = 8$ fő.	1 pont*	
A második filmet látta, az elsőt nem: $14 - 3 = 11$ fő.	1 pont*	
Az első és a második közül legalább az egyiket látta: $8 + 11 + 3 = 22$ fő.	1 pont*	
Csak a harmadik filmet látta: $32 - 22 = 10$ fő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pont a logikai szita alkalmazása esetén is jár:* $11 + 14 - 3 = 22$ *fő látta az első és a második film közül legalább az egyiket.*

15. c)		
	2 pont	
Összesen $\binom{6}{2}=15$ „pár” lehet ismerős, amiből eddig 6 valósult meg,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a rajzolt gráfot teljes gráffá egészíti ki, és ez alapján helyesen válaszol.*
azaz még (15 – 6 =) 9 olyan pár van, amelynek tagjai nem ismerősei egymásnak.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a)		
A kúp és a henger alapkörének sugara 40 cm (4 dm).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A tartály térfogata (kúp és henger együtt) $V=\frac{40^2\cdot\pi\cdot110}{3}+40^2\cdot\pi\cdot120\approx$	2 pont	$V_{\text{henger}}\approx 603\ 186\ \text{cm}^3$ $V_{\text{kúp}}\approx 184\ 307\ \text{cm}^3$
$\approx 787\ 493\ \text{cm}^3$ ($\approx 787\ \text{dm}^3$),	1 pont	
azaz a tartályba legfeljebb 787 liter folyadék fér.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)		
 Helyes ábra, a kérdéses nyílásszöget jelölje α.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.*
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{40}{110} \approx 0{,}3636$	1 pont	
Ebből $\frac{\alpha}{2} \approx 20°$,	1 pont	
azaz a kúp nyílásszöge kb. 40°.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy tartály hibátlan: 0,92.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy mind a 10 tartály hibátlan: $0{,}92^{10} \approx 0{,}434$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a 10 tartály közül pontosan 1 hibás: $\binom{10}{1} \cdot 0{,}92^9 \cdot 0{,}08^1 \approx 0{,}378$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz kb. 0,812.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. d) első megoldás		
Az M. Kft.-nél minden dolgozó esetében rendre nagyobb a fizetés és az átlagos fizetés (abszolút) eltérése, mint az A. Bt. dolgozóinál,	2 pont	
így az M. Kft.-nél nagyobb a havi fizetések szórása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. d) második megoldás		
Az M. Kft.-nél a fizetések szórása $\sqrt{\frac{120^2 + 3 \cdot 40^2}{4}}$, azaz kb. 69,28 (ezer Ft),	1 pont	
az A. Bt.-nél a fizetések szórása $\sqrt{\frac{60^2 + 3 \cdot 20^2}{4}}$, azaz kb. 34,64 (ezer Ft).	1 pont	
így az M. Kft.-nél nagyobb a havi fizetések szórása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. a) **első megoldás**		
Jelölje h a papír vastagságát (cm-ben mérve), ekkor egy lap térfogata (cm³-ben mérve) $V = 21 \cdot 29,7 \cdot h$.	1 pont	
A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa: $0,8 = \frac{5}{V} = \frac{5}{21 \cdot 29,7 \cdot h}$,	1 pont	
ahonnan $h = \frac{5}{21 \cdot 29,7 \cdot 0,8}$ ≈ 0,010 cm,	1 pont	
azaz kb. 0,1 milliméter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) **második megoldás**		
Egy lap térfogata a tömeg és a sűrűség hányadosa: $V = \frac{5}{0,8} = 6,25\,(\text{cm}^3)$.	1 pont	
Jelölje h a papír vastagságát (cm-ben mérve), ekkor egy lap térfogatára $6,25 = 21 \cdot 29,7 \cdot h$.	1 pont	
ahonnan $h = \frac{6,25}{21 \cdot 29,7}$ ≈ 0,010 cm,	1 pont	
azaz kb. 0,1 milliméter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
A nagyított kép hosszabb oldala ekkor 297 mm lesz,	1 pont	*A nagyítás aránya* $\frac{297}{150} = 1,98$.
így a rövidebb oldal hossza $\frac{2}{3} \cdot 297 = 198$ mm.	1 pont	*A rövidebb oldal hossza* 1,98 · 100 = 198 mm.
Azaz a (hosszabbik oldallal párhuzamosan) keletkező csíkok szélessége: $\frac{210-198}{2} = 6$ mm.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c)		
A nagyított kép rövidebb oldala ekkor 210 mm lesz,	1 pont	*A nagyítás aránya* $\frac{210}{100}=2{,}1$.
így a nagyobb oldal hossza $\frac{3}{2}\cdot 210=315$ mm lenne.	1 pont	*A nagyobb oldal hossza* $2{,}1\cdot 150=315$ mm *lenne.*
Így összesen egy $210\times(315-297)=210\times 18$ mm méretű rész lemarad a nagyításról.	1 pont	
Ez a teljes nagyított kép területének $\frac{18}{315}\cdot 100\approx$	1 pont	$\frac{210\cdot 18}{210\cdot 315}\cdot 100$
≈ 5,7%-a (és ez a területarány az eredeti képen is ugyanennyi).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. d)		
Balázs az 51 képért $51\cdot 49=2499$ Ft-ot fizetett.	1 pont	
Hajni kevesebb képet rendelt, tehát egy képért 59 Ft-ot fizet. Így az általa rendelt képek száma legalább $\frac{2499}{59}\approx 42{,}4$.	1 pont	
Hajni legalább 43, legfeljebb 50 képet rendelhetett.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. a)		
A kör egyenletét átalakítva: $(x-1)^2+(y-2)^2=20$,	2 pont	
tehát a kör középpontjának koordinátái valóban (1; 2).	1 pont	
A kör sugara $r=\sqrt{20}$ (≈ 4,47).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
A k kör egyenletébe $x=3$-at helyettesítve $y^2-4y-12=0$.	1 pont	$(y-2)^2=16$
Ennek pozitív megoldása $y=6$ (a negatív pedig -2).	2 pont	
(Mivel az A pont illeszkedik a k körre, és az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért) a kör középpontját K-val jelölve az érintőegyenes egyik normálvektora: $\overrightarrow{KA}$ (2; 4).	2 pont	
Az érintőegyenes egyenlete $2x+4y=30$.	2 pont	$x+2y=15$
Összesen:	**7 pont**	

18. c) **első megoldás**		
Ha négy színnel színezünk, akkor 4! = 24 lehetőségünk van.	1 pont	
Ha három színnel színezünk, akkor 4-féleképpen választhatjuk ki a színeket. (Legyen például a kiválasztott három szín a piros, a sárga és a kék.)	1 pont	
Az *A* jelű tartományt 3-féle színnel színezhetjük, a *B* színezésére két szín közül választhatunk. (Legyen például az *A* piros és a *B* sárga.)	1 pont	*A három szín közül valamelyiket kétszer használjuk, ez 3 lehetőség. Ez a két egyszínű mező csak szemközti lehet, ez 2-féle lehetőség.*
Ekkor a *C* és a *D* tartományt 2-féleképpen színezhetjük ki (ha a *C* piros, akkor a *D* kék; ha a *C* kék, akkor a *D* csak sárga lehet).	1 pont	*A maradék két mező színezése a másik két színnel 2-féleképpen történhet.*
Három színnel tehát $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$-féleképpen színezhetünk.	1 pont	
A lehetséges színezések száma (24 + 48 =) 72.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) **második megoldás**		
Az *A* tartományt 4-féle, a *B* tartományt 3-féle színnel színezhetjük,	1 pont	
e két tartomány lehetséges színezéseinek száma tehát $4 \cdot 3 = 12$.	1 pont	
(Legyen például *A* piros és *B* sárga.) Két lehetőséget vizsgálunk. Ha a *D* tartomány színe megegyezik a *B* színével, akkor a *C* színe 2-féle lehet. (A példában *C* kék vagy zöld lehet.)	1 pont	
Ha *B* és *D* különböző színű, akkor a *C* és *D* tartományokat 4-féleképpen színezhetjük. (Ha a példában *D* kék, akkor *C* színe piros vagy zöld, ha *D* zöld, akkor *C* piros vagy kék lehet.)	1 pont	
Az *A* és *B* tartományok egy adott színezéséhez tehát a *C* és *D* tartományoknak (2 + 4 =) 6-féle színezése tartozik.	1 pont	
A lehetséges színezések száma $12 \cdot 6 = 72$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	