ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. október 19.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

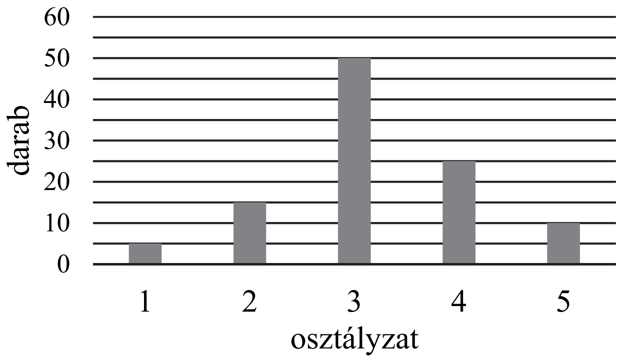
2.		
(6! =) 720	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
B, C, E	3 pont	*Minden jó válasz 1 pontot, minden hibás válasz –1 pontot ér, de az összpontszám nem lehet negatív.*
Összesen:	**3 pont**	

4.		
(10 200 : 0,85 =) 12 000 (Ft)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A minimum helye: 3.	1 pont	
A minimum értéke: –1.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
($\sqrt[3]{729\,000}$ =) 90 (cm)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
	3 pont	*A vízszintes tengelyen feltüntetett adatokért és a függőleges tengely arányos beosztásáért 1-1 pont jár. Az öt oszlop megfelelő magasságáért 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
$x = 5$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
($100 = 16 \cdot 6 + 4$, azaz) a 100-at 6-tal osztva 4 maradékot kapunk,	2 pont	*A 96. napon ér véget egy hatnapos ciklus.*
tehát az őr a kérdéses napon dolgozik.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A második tag: $(5 \cdot (-2) + 1 =) -9$.	1 pont	
A harmadik tag: $((-9) \cdot (-2) + 1 =)$ 19.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

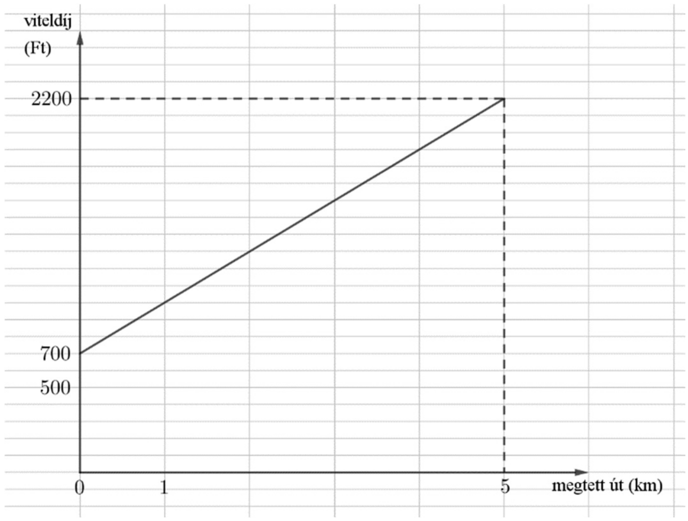
11.		
$r \left(= \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2}\right) = 5$	2 pont	
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Két kockával ($6 \cdot 6 =$) 36-féleképpen dobhatunk (összes eset száma).	1 pont	
Ezek közül három olyan dobás van, amikor legalább 11 a két dobott szám összege: 5-6, 6-5, 6-6.	1 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{3}{36} (= 0{,}08\dot{3})$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

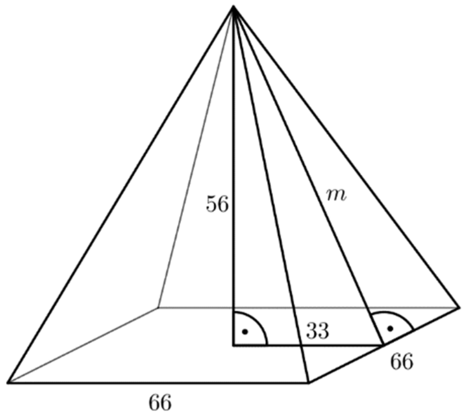
13. a)		
$700 + 12{,}5 \cdot 300 =$	1 pont	
$= 4450$ (Ft)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
A megtett utat kilométerben számolva jelölje x. A szöveg alapján: $700 + x \cdot 300 = 2275$,	1 pont	
amiből a megtett út $x = 5{,}25$ (km).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. c)		
		
A vizsgázó egy szakaszt ábrázol,	1 pont	
amelynek egyik végpontja a (0; 700),	1 pont	
másik végpontja az (5; 2200) pont.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. d) első megoldás		
Az alapdíjat forintban számolva jelölje a, a kilométerdíjat k, ekkor a feladat szövege alapján $\left.\begin{aligned} a+6,5k&=2825 \\ a+10,4k&=4190 \end{aligned}\right\}$.	2 pont	
Ebből $3{,}9k = 1365$.	1 pont	
Azaz a kilométerdíj $k = 350$ (Ft),	1 pont	
az alapdíj pedig $a = 550$ (Ft) (és ezek az értékek megfelelnek a feladat feltételeinek).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. d) második megoldás		
A második alkalommal a (10,4 – 6,5 =) 3,9 km-rel hosszabb útért (4190 – 2825 =) 1365 Ft-tal többet fizetett Gergő,	3 pont	
tehát a kilométerdíj $1365 : 3{,}9 = 350$ (Ft).	1 pont	
Így az alapdíj $2825 - 6{,}5 \cdot 350 = 550$ (Ft).	1 pont	$4190 - 10{,}4 \cdot 350 = 550$
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
A gúla oldallapjának m magassága (a Pitagorasz-tétel felhasználásával): $m=\sqrt{33^2+56^2}=65$ (cm).	2 pont	
A gúla egy oldallapjának területe $T=\dfrac{66\cdot 65}{2}$ (= 2145 cm^2).	1 pont	
A gúla felszíne: $A = 66^2 + 4\cdot 2145 = 12\,936$ cm^2.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b) első megoldás		
A csonkagúla fedőéle feleakkora, mint a gúla alapéle, tehát a hossza 33 (cm).	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A csonkagúla magassága feleakkora, mint a gúla magassága, tehát a hossza 28 (cm).	1 pont	
A csonkagúla térfogata: $V=\dfrac{28}{3}\cdot(66^2+33^2+\sqrt{66^2\cdot 33^2})=71\ 148$ cm^3.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b) második megoldás		
Az eredeti gúla térfogata: $\dfrac{66^2\cdot 56}{3}=81\ 312$ (cm^3).	1 pont	
A két részre vágáskor keletkező kisebb gúla hasonló az eredeti gúlához, a hasonlóság aránya 1 : 2, vagyis a kisebb gúla térfogata $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ része az eredeti gúla térfogatának.	1 pont	*A levágott gúla térfogata:* $\dfrac{33^2\cdot 28}{3}=10\ 164$ (cm^3).
Így a csonkagúla térfogata $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$ része az eredeti gúla térfogatának,	1 pont	$V_{\text{csonkagúla}}=V_{\text{gúla}}-V_{\text{levágott gúla}}$
azaz $\dfrac{7}{8}\cdot 81\ 312=71\ 148$ cm^3.	1 pont	$81\ 312-10\ 164=$ $=71\ 148$ cm^3
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege páros.	1 pont	*A páratlan fokszámú csúcsok száma minden gráfban páros.*
(Mivel $3 \cdot 7 = 21$ páratlan, ezért) ilyen 7 pontú gráf nincs.	1 pont	*(Mivel a 7 és a 3 is páratlan szám, ezért) nem létezik a kérdezett gráf.*
Összesen:	**2 pont**	

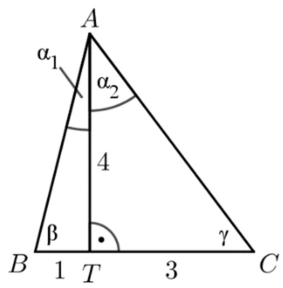
15. a)		
Dávid jegyeinek mediánja 3,	1 pont	
jegyeinek átlaga 3,8.	1 pont	
Így János jegyeinek mediánja 4, átlaga 2,8.	1 pont	
Ha János jegyeit nagyság szerint növekvő sorba rendezzük, akkor a harmadik jegy 4-es. Mivel $2{,}8 \cdot 5 = 14$, így a többi négy jegy összege 10. A negyedik és ötödik jegye is csak 4-es lehet (5-ös jegye nem lehet, mert az összeg nagyobb lenne, mint 14.) A maradék két jegy összege csak úgy lehet 2, ha mindkét jegy 1-es.	2 pont	*Kevésbé részletes magyarázat is elfogadható.*
János jegyei tehát 1, 1, 4, 4, 4.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. b)		
Az egész évben szerzett jegyek összege $9 \cdot 3 + 6 \cdot 4{,}5 = 54$.	1 pont	
Összesen 15 jegyet kapott, ezek átlaga $\frac{54}{15} =$	1 pont	
$= 3{,}6$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
Az öt számból kettőt $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5
A kiválasztott számok átlaga pontosan akkor egész szám, ha a kiválasztott számok összege páros szám, azaz, ha két páros vagy két páratlan számot választunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kedvező esetek: 1-3, 1-5, 3-5 és 2-4, ezek száma 4.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{4}{10} = 0{,}4$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

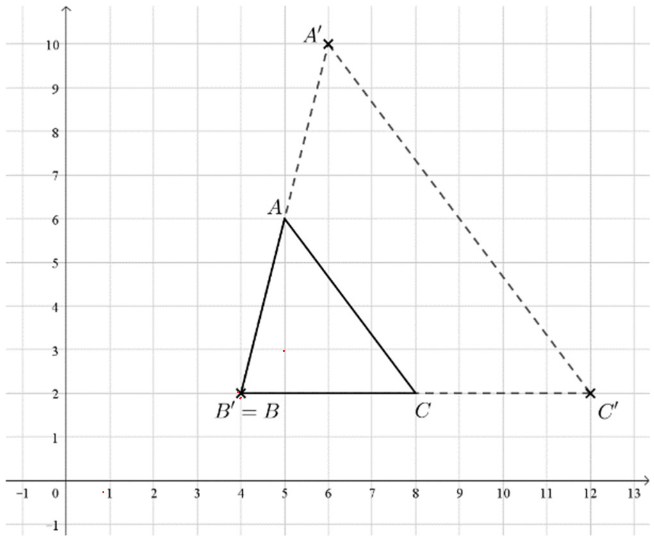
16. a) első megoldás		
A háromszög AB oldalának hossza (például a két pont távolságára vonatkozó összefüggés alkalmazásával:) $AB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ ($\approx 4{,}12$).	1 pont	
Ugyanígy $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.	1 pont	
Jelöljük az ABC háromszögben a kérdéses szöget α-val, és írjuk fel a koszinusztételt ($BC = 4$): $16 = 17 + 25 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot 5 \cdot \cos\alpha$.	2 pont	*Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva:* $\frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{17} \cdot \sin\alpha}{2}$.
Ebből $\cos\alpha \approx 0{,}6306$,	1 pont	$\sin\alpha \approx 0{,}7761$ *(és α hegyesszög)*
így $\alpha \approx 50{,}91°$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. a) második megoldás		
(Az ábra jelöléseit használjuk. A keresett szög $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.) $BT = 1$, $TC = 3$, $AT = 4$ 	1 pont	
Az ABT háromszögben $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{1}{4}$,	1 pont	$\mathrm{tg}\,\beta = 4$
$\alpha_1 \approx 14{,}04°$.	1 pont	$\beta \approx 75{,}96°$
Az ATC háromszögben $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{3}{4}$,	1 pont	$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{4}{3}$
$\alpha_2 \approx 36{,}87°$.	1 pont	$\gamma \approx 53{,}13°$
Így $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 50{,}91°$.	1 pont	$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 50{,}91°$
Összesen:	**6 pont**	

16. a) harmadik megoldás		
$\overrightarrow{AB}=(-1;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-4)$.	1 pont	
A vektorok hossza $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{17}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=5$.	1 pont	
A keresett szög a két vektor által bezárt szög, jelöljük α-val. Írjuk fel a vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen: $\sqrt{17}\cdot 5\cdot\cos\alpha=(-1)\cdot 3+(-4)\cdot(-4)$.	2 pont	
Ebből cos α ≈ 0,6306,	1 pont	
így α ≈ 50,91°.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b)		
A kérdéses magasságvonal áthalad a *B* ponton, és egy normálvektora az $\overrightarrow{AC}$ (3; –4) vektor.	2 pont	
A magasságvonal egyenlete $3x-4y=3\cdot 4+(-4)\cdot 2$, azaz $3x-4y=4$.	2 pont	
A magasságpont (rajta van az *A*-ra illeszkedő magasságvonalon, melynek egyenlete *x* = 5, így) első koordinátája 5,	1 pont	
második koordinátáját a *B*-ből induló magasságvonal egyenletéből az *x* = 5 helyettesítéssel kapjuk: *y* = 2,75. (Tehát *M*(5; 2,75).)	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: A C csúcsra illeszkedő magasságvonal egyenlete: $x+4y=16$.

16. c)		
	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen válaszol.*
A *B* pont képe önmaga, (azaz *B*'(4; 2)).	1 pont	
C'(12; 2)	1 pont	
A'(6; 10)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A sorozat differenciája $d = \frac{81-24}{3} = 19$,	2 pont	
első tagja (24 – 19 =) 5.	1 pont	
A sorozat első 16 tagjának összege $\frac{2\cdot 5 + 15\cdot 19}{2}\cdot 16 = 2360$.	2 pont	
A sorozat 106. tagja $5 + 105\cdot 19 = 2000$.	1 pont	
$\frac{2360}{2000} = 1{,}18$,	1 pont	
azaz 18%-kal nagyobb a sorozat első 16 tagjának összege a sorozat 106. tagjánál.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. b)		
A sorozat hányadosa $q = \sqrt[3]{\frac{81}{24}} = 1{,}5$,	2 pont	
első tagja $(24:1{,}5 =)$ 16.	1 pont	
(A sorozat *n*-edik tagja $a_n = 16\cdot 1{,}5^{n-1}$.) Megoldjuk a $16\cdot 1{,}5^{n-1} = 10\ 000\ 000$ egyenletet.	2 pont	
$1{,}5^{n-1} = 625\ 000$	1 pont	
$n - 1 = \log_{1{,}5} 625\,000$	1 pont	$n-1 = \frac{\lg 625\,000}{\lg 1{,}5}$
$n \approx 33{,}9$	1 pont	
(A sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért) a sorozatnak 33 tagja kisebb, mint 10 000 000.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a sorozat első tagja és hányadosa ismeretében próbálgatással megállapítja, hogy a sorozat 33. tagja még kisebb, de 34. tagja már nagyobb, mint 10 000 000*, és ezek alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.*
2. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel jól dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

18. a) első megoldás		
A fizikafakultációra járók számát jelölje *x*, ekkor a matematikafakultációra járók száma 2*x*. A feladat szövege alapján: $2x + x - 6 = 15$.	2 pont	
Ebből $x = 7$,	1 pont	*Matematikafakultációra* $2\cdot 7 = 14$*-en járnak,*
azaz (15 – 7 =) 8 olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem.	1 pont	14 – 6 = 8.
Összesen:	**4 pont**	

18. a) második megoldás		
Jelölje a azok számát, akik fizikafakultációra járnak, de matematikára nem; b pedig azok számát, akik matematikafakultációra járnak, de fizikára nem. A feladat szövege alapján: $\left.\begin{array}{r} a+b+6=15 \\ 2\cdot(a+6)=b+6 \end{array}\right\}.$	2 pont	
Az első egyenletből $a = 9 - b$.	1 pont	
Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $b = 8$ olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b) első megoldás		
A képernyő oldalainak hosszát jelölje $16a$ és $9a$.	1 pont	
Egy kis téglalap vízszintes oldalának hossza $\frac{16a}{6}$,	1 pont	
függőleges oldalának hossza $\frac{9a}{4}$.	1 pont	
Ezek aránya: $\frac{16a}{6}:\frac{9a}{4}=\frac{16a}{6}\cdot\frac{4}{9a}=$	1 pont	
$=\frac{64}{54}\left(=\frac{32}{27}\right).$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b) második megoldás		
Egy kis téglalap vízszintes oldalának hosszát jelölje x, a függőleges oldal hosszát jelölje y. Ekkor a képernyő vízszintes oldalának hossza $6x$, a függőlegesé $4y$.	2 pont	
Mivel tudjuk, hogy $\frac{6x}{4y}=\frac{16}{9}$,	1 pont	
ezért $\frac{x}{y}=\frac{16}{9}\cdot\frac{4}{6}=$	1 pont	
$=\frac{64}{54}\left(=\frac{32}{27}\right).$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c) **első megoldás**		
Stefi téglalapja 24, utána Cilié 23 helyre kerülhet. A lehetséges esetek száma $24 \cdot 23 = 552$ (összes eset száma).	2 pont	*(Ha nem különböztetjük meg a két lány téglalapját egymástól, akkor) ezek lehetséges elhelyezkedéseinek a száma* $\binom{24}{2} = 276$.
Ezek közül a kedvező esetek száma $6 \cdot 5 = 30$.	2 pont	*Az első sorban lévő* 6 *helyen* $\binom{6}{2} = 15$*-féleképpen helyezkedhet el a két téglalap.*
A kérdéses valószínűség: $\frac{30}{552}$ ($\approx 0{,}054$).	1 pont	$\frac{15}{276}$
Összesen:	**5 pont**	

18. c) **második megoldás**		
(Elhelyezzük a két téglalapot a képernyőn.) Annak valószínűsége, hogy a Stefit megjelenítő téglalap az első sorba kerül: $\frac{6}{24}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy ezután a Cilit megjelenítő téglalap is az első sorba kerül: $\frac{5}{23}$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata: $\frac{30}{552}$ ($\approx 0{,}054$).	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. d)		
A 24! szorzatban tényezőként szerepel az 5, a 10, a 15 és a 20,	1 pont	
valamint (például) a 2.	1 pont	$2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 = 30\,000$
Ezek szorzata és így a 24! is osztható 10 000-rel.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	