ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

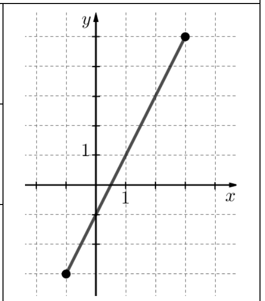
I.

1.		
$B = \{1; 2; 3; 4\}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
(Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{26^2 - 10^2} =$) 24 cm	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
-3	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$(840 : 0{,}35 =)$ 2400 Ft	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A grafikon lineáris függvény grafikonja, melynek meredeksége 2,	1 pont	
az y tengelyt a (-1)-ben metszi,	1 pont	
és a megfelelő intervallumon van ábrázolva.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
A megadott öt pozitív egész szám átlaga 4,	1 pont	*Néhány példa a jó megoldásra:* 3, 3, 3, 3, 8, *vagy* 2, 3, 3, 3, 9, *vagy* 1, 2, 3, 3, 11.
egyetlen módusza 3.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
g, *i*	2 pont	*Egy helyes, vagy két helyes és egy hibás válasz esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

18. d) **első megoldás**		
Három kockával összesen $(6 \cdot 6 \cdot 6 =)$ 216-féleképpen dobhatunk.	1 pont	
$(5 \cdot 5 \cdot 5 =)$ 125-féleképpen dobhatunk úgy, hogy nincs 5-ös a dobásaink között.	1 pont	
$(216 - 125 =)$ 91 esetben lesz 5-ös a dobott számok között.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{91}{216}$ $(\approx 0{,}42)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy egy kockával dobva nem 5-öst dobunk: $\frac{5}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy három kockával dobva egyik dobás sem 5-ös: $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy három kockával dobva legalább az egyik dobás 5-ös: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$	1 pont	
$= \frac{91}{216}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d) **harmadik megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy mindhárom kockával 5-öst dobunk: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.	1 pont	$\frac{1}{6^3}$
Annak a valószínűsége, hogy három kockával dobva pontosan két 5-öst dobunk: $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$.	1 pont	$\frac{\binom{3}{1} \cdot 1^2 \cdot 5}{6^3}$
Annak a valószínűsége, hogy három kockával dobva pontosan egy 5-öst dobunk: $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$.	1 pont	$\frac{\binom{3}{2} \cdot 1 \cdot 5^2}{6^3}$
A kérdezett valószínűség ezek összege, azaz $\frac{91}{216}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. a)

(Páros számokat dobtak, és az összegük 6-nál kisebb volt, így) a két dobott szám csak a 2, 2 lehetett.	1 pont	
A nyeremény $(4\cdot 20+3\cdot 20+2\cdot 20=)$ 180 pont.	1 pont	
Andreának tehát (180 – 60 =) 120 ponttal nőtt a pontszáma,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így a játék végén (120 + 120 =) 240 pontja lett.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)

Két páratlan számot dobtak, melynek az összege legalább 6,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így a lehetséges dobások: 1, 5 (valamilyen sorrendben); 3, 3; 3, 5 (valamilyen sorrendben); 5, 5.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)

Ha x ponttal fogadott az A eseményre, akkor $2x$ ponttal fogadott az E-re, és $70-3x$ ponttal fogadott a D eseményre.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege alapján: $4\cdot x+2\cdot(70-3x)+3\cdot 2x=200$.	2 pont	
$4x+140=200$	1 pont	
$x=15$, azaz Balázs 15 ponttal fogadott az A eseményre.	1 pont	
Ellenőrzés (30 ponttal fogadott az E, $70-45=25$ ponttal fogadott a D eseményre, és $4\cdot 15+2\cdot 25+3\cdot 30=200$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

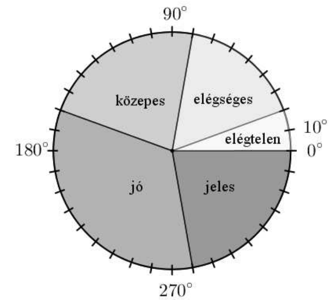
8.

$\left(\dfrac{(10-2)\cdot 180°}{10}=180°-\dfrac{360°}{10}=\right)144°$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.

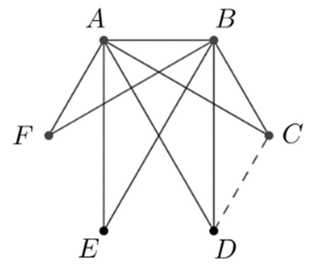
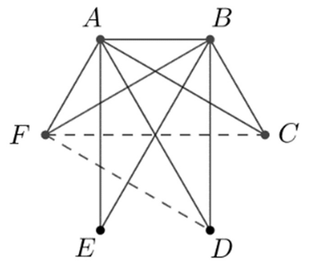
$4^x=32$	1 pont	
$x=\log_4 32$	1 pont	$2^{2x}=2^5$
$x=2{,}5$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.

$360°:18=20°$, így az egyes osztályzatokat ábrázoló körcikkek középponti szögei rendre: 20°, 60°, 80°, 120°, 80°.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.

1122, 1212, 2112	3 pont	*Minden megfelelő számért 1 pont jár. Ha a vizsgázó hibás számo(ka)t is ír, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*
Összesen:	**3 pont**	

12.		
Lehet 2 ismerőse,	1 pont	
az ehhez tartozó gráf: 	1 pont	.
Lehet 4 ismerőse,	1 pont	
ebben az esetben a gráf: 	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

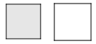
17. d) első megoldás		
A háromszög egyik oldalának hossza: $AC = 3\sqrt{2}$ ($\approx 4{,}24$) (cm),	2 pont	$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$
másik oldalának hossza: $CE = 3$ (cm),	1 pont	
a két oldal által bezárt szöge: $ACE\angle = 45° + 60° = 105°$.	1 pont	
$T_{ACE} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin 105°}{2} \approx$	1 pont	
$\approx 6{,}15$ (cm^2)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. d) második megoldás		
A négyzet és a szabályos háromszög területe együtt $3^2 + \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 + 2{,}25 \cdot \sqrt{3}$ ($\approx 12{,}90$ cm^2).	2 pont	
Az ABE háromszög AB-hez tartozó magassága 1,5 (cm), az ABE háromszög területe tehát 2,25 (cm^2).	1 pont	
Az ADC háromszög területe 4,5 (cm^2).	1 pont	
Tehát a kérdezett terület: $9 + 2{,}25 \cdot \sqrt{3} - 2{,}25 - 4{,}5 \approx$	1 pont	
$\approx 6{,}15$ (cm^2).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. e) első megoldás		
$BA = 3$ cm, $BC = 3$ cm, $BE = 3$ cm	1 pont	
Mivel a B pont egyenlő távolságra van a három csúcstól, ezért a B pont az ACE háromszög körülírt körének középpontja. (Így az állítást beláttuk.)	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. e) második megoldás		
A háromszög körülírt körének középpontja bármely két oldalfelező merőleges metszéspontjaként is megkapható.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az AC (átló) oldalfelező merőlegese a BD átló egyenese, így átmegy a B ponton.	1 pont	
Az EC oldal felezőmerőlegese (a BCE szabályos háromszög magasságvonala) is átmegy a B ponton. (Tehát az állítás igaz.)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b)

A kicsi, szürke, nem lyukas négyzet és a kicsi, fehér, nem lyukas négyzet bekarikázása. 	2 pont	*Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

17. c) első megoldás

Összesen $\binom{16}{2}$-féleképpen húzhatunk.	1 pont	
A készletben 4 darab kicsi háromszög van. Közülük $\binom{4}{2}$-féleképpen húzhatunk kettőt (kedvező esetek száma).	1 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{16}{2}} =$	1 pont	
$= \dfrac{6}{120}$ (= 0,05).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c) második megoldás

Mivel a készletben 4 darab kicsi háromszög van, ezért annak a valószínűsége, hogy az első húzott elem kicsi háromszög: $\frac{4}{16}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az második húzott elem is kicsi háromszög: $\frac{3}{15}$.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} =$	1 pont	
$= \dfrac{12}{240}$ (= 0,05).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

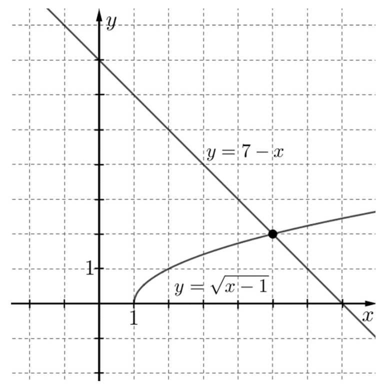
13. a)

Közös nevezőre hozunk: $\frac{9x+3}{6} + \frac{2x-2}{6} = 13$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$9x + 3 + 2x - 2 = 78$	1 pont	
$11x = 77$	1 pont	
$x = 7$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b) első megoldás

Négyzetre emelünk: $x - 1 = 49 - 14x + x^2$.	1 pont	
$x^2 - 15x + 50 = 0$	1 pont	
Az egyenlet gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = 10$.	2 pont	
Ellenőrzés: az 5 megoldása az eredeti egyenletnek,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az $1 \le x \le 7$ feltétel mellett az ekvivalenciára hivatkozik.*
a 10 nem megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b) második megoldás

Grafikus megoldás: 	4 pont	*2 pont a négyzetgyökös, 2 pont a lineáris függvény helyes ábrázolásáért jár.*
A grafikonokról leolvasva $x = 5$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)

(A mértani sorozat hányadosát q-val jelölve:) $a_4 = 0{,}75 \cdot q^3 = 6$.	1 pont	
Ebből $q^3 = 8$,	1 pont	
azaz $q = 2$.	1 pont	
$S_{20} = 0{,}75 \cdot \frac{2^{20}-1}{2-1} =$	1 pont	
$= 786\,431{,}25$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b) első megoldás

A sorozat első tagját a-val, különbségét d-vel jelölve, a szöveg alapján: $a + (a + d) + (a + 2d) = 18$,	1 pont	
valamint $(a + 2d) + (a + 3d) = a + (a + d) + 28$.	1 pont	*A harmadik tag 2d-vel nagyobb az elsőnél, a negyedik tag 2d-vel nagyobb a másodiknál, így $4d = 28$.*
A második egyenletből $d = 7$.	2 pont	
Ezt az első egyenletbe helyettesítve $a = -1$.	1 pont	
A sorozat 20. tagja: $a_{20} = 132$. $S_{20} = \frac{-1+132}{2} \cdot 20 = 1310$	2 pont	$-1 + 6 + 13 + \ldots + 132 =$ $= 1310$
Összesen:	**7 pont**	

14. b) második megoldás

A sorozat második tagját b-vel, különbségét d-vel jelölve, a szöveg alapján: $(b - d) + b + (b + d) = 18$,	1 pont	
ahonnan $b = 6$.	1 pont	
A második feltétel szerint $(b + d) + (b + 2d) = (b - d) + b + 28$,	1 pont	
ahonnan $d = 7$.	1 pont	
Így a sorozat első tagja: $b - d = -1$.	1 pont	
$S_{20} = \frac{2 \cdot (-1) + 19 \cdot 7}{2} \cdot 20 = 1310$	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

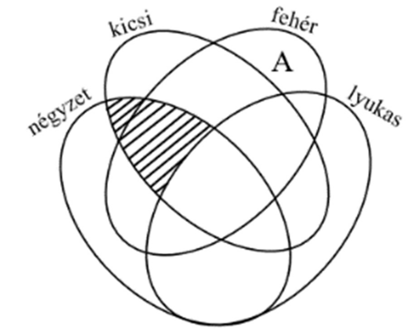
16. d) első megoldás

A négy csúcsot az E, F, G és H betűkkel ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 24-féleképpen betűzhetjük meg (összes eset).	1 pont	
Az E jelű csúcs 4 helyen lehet.	1 pont	*E és F az egyik oldal két végpontja lehet. Ez $4 \cdot 2 = 8$ lehetőség.*
Innen 2 irányban is lehet szabályosan betűzni (az irány eldöntése után a betűzés már egyértelmű),	1 pont	*Mindegyik esetben csak egyféleképpen helyezkedhet el szabályosan G és H.*
így a kedvező esetek száma $4 \cdot 2 = 8$.	1 pont	*Tehát a kedvező esetek száma is 8.*
A keresett valószínűség: $\frac{8}{24}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

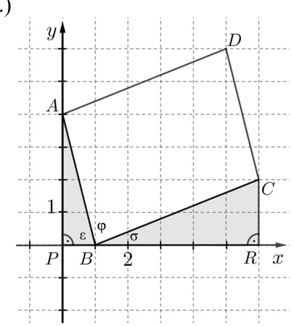
16. d) második megoldás

Az E betű helyét valamelyik csúcsban rögzítjük.	1 pont	
Ekkor a többi betűt 3!-féleképpen helyezhetjük el. Az összes eset száma így 6.	1 pont	
Ezek közül 2 kedvező, szabályos betűzésű.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a)

	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. c) **második megoldás**		
A kérdéses szöget bezáró két vektor koordinátái: $\overrightarrow{BA}=(-1;4)$; $\overrightarrow{BC}=(5;2)$.	1 pont	
A két vektor skaláris szorzata a koordinátákkal: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\cdot 5+4\cdot 2=3$.	1 pont	
A két vektor hossza: $\left\lvert\overrightarrow{BA}\right\rvert=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$, $\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$.	1 pont	
A közbezárt szöget φ-vel jelölve a két vektor skaláris szorzata a definíció szerint: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{17}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos\varphi$.	1 pont	
A felírt skaláris szorzatok egyenlők, így $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{29}}$,	1 pont	
azaz $\varphi\approx 82{,}2°$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c) **harmadik megoldás**		
(Legyen az A pont merőleges vetülete az x tengelyen $P(0; 0)$, a C ponté pedig $R(6; 0)$. A kérdéses hegyesszöget jelölje φ, a mellett lévő két hegyesszöget pedig ε és σ.) 	1 pont	
Az APB derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\,\varepsilon=\dfrac{4}{1}$,	1 pont	
$\varepsilon\approx 76{,}0°$.	1 pont	
Hasonlóan az BRC derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\,\sigma=\dfrac{2}{5}$,	1 pont	
$\sigma\approx 21{,}8°$.	1 pont	
$\varphi=180°-\sigma-\varepsilon\approx 82{,}2°$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. a)		
A doboz térfogata: $V=13^2\cdot\pi\cdot 18\approx$	1 pont	
$\approx 9557\ \mathrm{cm}^3$,	1 pont	
azaz kb. 9,6 liter.	2 pont	*1 pont jár a helyes mértékegységváltásért, 1 pont jár a helyes kerekítésért.*
Összesen:	**4 pont**	

15. b)		
Egy ilyen méretű forgáshenger felszíne: $2\cdot 13^2\cdot\pi+2\cdot 13\cdot\pi\cdot 18\approx$	1 pont	
$\approx 2532\ \mathrm{cm}^2$.	1 pont	
Az egy dobozhoz felhasznált lemez területe tehát $1{,}18\cdot 2532\approx 2988\ \mathrm{cm}^2\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}3\ \mathrm{m}^2$,	1 pont	
így 1000 doboz elkészítéséhez kb. 300 m^2 fémlemez szükséges.	1 pont	.
Összesen:	**5 pont**	

15. c) **első megoldás**		
Mivel $800:2000=2:5$, ezért a legkisebb doboz ára legyen (forintban számolva) $2x$, a középsőé $5x$.	1 pont	
$2x+5x=2100$	1 pont	
$x=300$	1 pont	
A legkisebb doboz ára $(2\cdot 300=)$ 600 Ft, a középső doboz ára pedig $(5\cdot 300=)$ 1500 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c) **második megoldás**		
A legkisebb doboz ára legyen (forintban számolva) $800x$, a középsőé $2000x$.	1 pont	*Összesen* 2800 cm^2 *lemez kerül* 2100 Ft-*ba,* *így* 1 cm^2 *lemez ára* 2100 : 2800 = 0,75 Ft.
$800x+2000x=2100$	1 pont	
$x=0{,}75$	1 pont	
A legkisebb doboz ára $(800\cdot 0{,}75=)$ 600 Ft, a középső doboz ára pedig $(2000\cdot 0{,}75=)$ 1500 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a) első megoldás		
Az egyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(1; -4)$,	1 pont	
egy normálvektora: (4; 1),	1 pont	$-4x - y = -4$
így az egyenes egyenlete: $4x + y = 4$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

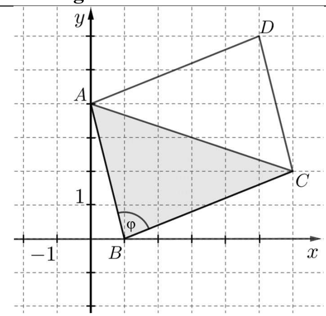
16. a) második megoldás		
Az egyenes az y tengelyt a $b = 4$-nél metszi,	1 pont	
meredeksége pedig $m = -4$,	1 pont	
így az egyenes egyenlete $y = -4x + 4$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) első megoldás		
$\overrightarrow{AD} = \big((5; 6) - (0; 4) =\big)(5; 2)$ $\overrightarrow{BC} = \big((6; 2) - (1; 0) =\big)(5; 2)$	2 pont	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1; -4)$
Mivel a négyszög két szemközti oldalvektora egyenlő (és így két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő hosszú), az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) második megoldás		
A négyszög oldalainak hossza: $\lvert AB\rvert = \lvert DC\rvert = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$, $\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.	2 pont	
Mivel a négyszög szemközti oldalai egyenlő hosszúak, így az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) harmadik megoldás		
Az AB és a DC oldalegyenesek meredeksége is -4 (például ábra alapján). Az AD és az BC oldalegyenesek meredeksége is $\frac{2}{5}$.	2 pont	
Mivel a négyszög szemközti oldalegyeneseinek meredeksége egyenlő, ezért azok párhuzamosak, így az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b) negyedik megoldás		
A négyszög két átlójának felezőpontja: $F_{AC} = \left(\left(\frac{0+6}{2}; \frac{4+2}{2}\right) =\right)(3; 3)$, $F_{BD} = \left(\left(\frac{1+5}{2}; \frac{0+6}{2}\right) =\right)(3; 3)$.	2 pont	
A négyszög átlóinak felezőpontja egybeesik (azaz az átlók felezik egymást), így az állítást beláttuk.	1 pont	*A négyszög középpontosan szimmetrikus, így az állítást beláttuk.*
Összesen:	**3 pont**	

16. c) első megoldás		
 A kérdéses szöget bezáró két oldal hossza: $AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.	1 pont	
Az AC átló hossza: $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$.	1 pont	
Az ABC háromszögben a kérdéses szöget φ-vel jelölve és felírva a koszinusztételt: $\sqrt{40}^2 = \sqrt{17}^2 + \sqrt{29}^2 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos\varphi$.	1 pont	
$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{29}}$ $(\approx 0{,}1351)$,	2 pont	
innen $\varphi \approx 82{,}2°$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	