ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

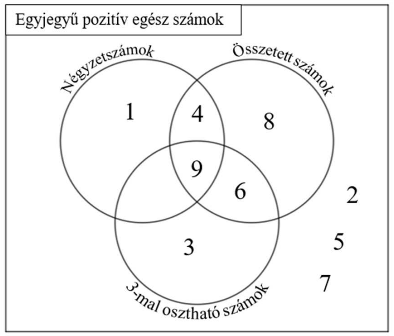
18. d)		
Egy ötjegyű szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A megadott számjegyekből alkotható „kétjegyű”, 4-gyel osztható számok: 04, 12, 20, 24, 40 és 92.	2 pont	
A 04, 20 és 40 végződés esetén az első három helyiértéken $3! = 6$-féle számhármas állhat.	1 pont	
A 12, 24 és 92 végződés esetén a 0 nem állhat az első helyiértéken, így az első három helyiértéken $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$-féle számhármas állhat.	1 pont	
A feltételeknek megfelelő ötjegyű számok száma: $3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 30$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendszerezetten felsorolja a feltételeknek megfelelő ötjegyű számokat, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszám jár.

17. c) második megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy az először kiválasztott edényben van a natúr müzli (és a többiben csokis): $\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}$ ($\approx$ 0,1174).	3 pont	
Rendre ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy a második, a harmadik vagy a negyedik edényben van a sima müzli.	1 pont	
A kérdezett valószínűség: $4\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\approx 0{,}470$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a)		
I. állítás: igaz. II. állítás: igaz. III. állítás: hamis.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, kettő vagy több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő indoklás (helyes ábra vagy megfelelő ellenpélda: két diszjunkt halmaz, ahol B nem üres).	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)		
	5 pont	*8 jól elhelyezett szám esetén 4 pont, 7 vagy 6 jól elhelyezett szám esetén 3 pont, 5 vagy 4 jól elhelyezett szám esetén 2 pont, 3 vagy 2 jól elhelyezett szám esetén 1 pont jár, 2-nél kevesebb jól elhelyezett szám esetén nem jár pont.*
Összesen:	**5 pont**	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$B = \{1; 2; 3; 4\}$	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)45$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
–5	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
C	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
(A másik befogó hosszát *a*-val jelölve) $\text{tg}\,32° = \frac{5}{a}$,	2 pont	*A háromszög harmadik szöge 58°-os,* $\text{tg}\,58° = \frac{a}{5}$.
ebből $a\left(=\frac{5}{\text{tg}\,32°}\right) \approx 8$ cm.	1 pont	$a\ (= 5\cdot \text{tg}\,58°) \approx 8$ cm
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$(4^5 =)\ 1024$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A hatodik tag $1{,}5\cdot 3^4 =$	1 pont	
$= 121{,}5.$	1 pont	
Az első tag $1{,}5 : 3 = 0{,}5$, így az első tíz tag összege $0{,}5\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1} =$	1 pont	
$= 14\,762.$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a)		
A csonkakúp alapkörének sugara 7 cm, fedőkörének (egyben a henger alakú résznek) a sugara 5,5 cm, mindkét rész magassága 10,5 cm.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A forgáshenger alakú rész térfogata $5{,}5^2\cdot\pi\cdot 10{,}5 \approx$	1 pont	
$\approx 997{,}8\ (\text{cm}^3)$.	1 pont	
A csonkakúp alakú rész térfogata $(7^2 + 7\cdot 5{,}5 + 5{,}5^2)\cdot\pi\cdot 10{,}5 : 3 \approx$	1 pont	
$\approx 1294{,}7\ (\text{cm}^3)$.	1 pont	
Az edény térfogata ezek összege, azaz kb. 2293 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b)		
A csonkakúp alkotója egy olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója 10,5 cm, másik befogója (7 – 5,5 =) 1,5 cm hosszú.	1 pont	
Az alkotó hossza (a Pitagorasz-tétel felhasználásával): $\sqrt{10{,}5^2+1{,}5^2} \approx 10{,}6$ cm.	1 pont	
A csonkakúp palástjának területe $(7 + 5{,}5)\cdot 10{,}6\cdot\pi \approx 416{,}3\ (\text{cm}^2)$.	1 pont	
A henger palástjának területe $11\cdot\pi\cdot 10{,}5 \approx 362{,}9\ (\text{cm}^2)$.	1 pont	
Az edény alapkörének területe $7^2\cdot\pi \approx 153{,}9\ (\text{cm}^2)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a csonkakúp felszínéből kivonja a fedőkör területét* ($\approx 95{,}0$ cm^2).
Az edény belső felülete a fenti területek összege, azaz körülbelül 933 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az a) vagy a b) feladatrészben 14, *illetve* 11 *centiméteres sugarakkal helyesen számol, akkor emiatt összesen 1 pontot veszítsen.*

17. c) első megoldás		
Az összes (egyenlően valószínű) kiválasztás száma $\binom{20}{4}$ (= 4845).	1 pont	
A 20 edényből 1 natúr és 3 csokis müzlis edényt $\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{3}$ (= 2275)-féleképpen lehet kiválasztani (kedvező esetek száma).	2 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{2275}{4845} \approx 0{,}470$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó visszatevéses mintavétellel számol, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

II. B

16. a)		
A modell szerint 5 év alatt 3 000 000 Ft-tal csökken az autó ára.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
5 év = 60 hónap	1 pont	
$3\,000\,000 : 60 = 50\,000$ Ft-tal csökken az autó az értéke egy hónap alatt.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
A modell szerint az autó értéke hónapról hónapra a 0,99-szorosára csökken. Így két évvel a vásárlás után $6\,000\,000 \cdot 0{,}99^{24} \approx 4\,714\,069$ Ft-ot ér az autó.	2 pont	
$\left(\frac{4714069}{6000000} \approx 0{,}786\text{, így}\right)$ ez az eredeti ár kb. 78,6%-a.	1 pont	$0{,}99^{24} \approx 0{,}786$
Az autó értéke 2 év alatt kb. 21,4%-kal csökken.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
A vásárlástól eltelt hónapok számát *n*-nel jelölve megoldandó a $6000000 \cdot 0{,}99^n = 3000000$ egyenlet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$0{,}99^n = \frac{1}{2}$	1 pont	
$n = \log_{0{,}99}\frac{1}{2}\left(= \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}99}\right) \approx 68{,}97$	2 pont	
69 hónap elteltével csökken az autó értéke a felére.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

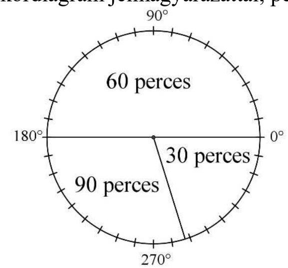
Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenséggel számol, akkor a megfelelő pontok járnak.

16. d)		
Az egyes hónapokban eladandó autók száma egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja 65, az első 12 tag összege 1110. A sorozat differenciáját jelölje *d*.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A megoldandó egyenlet: $\frac{2 \cdot 65 + 11d}{2} \cdot 12 = 1110$.	1 pont	$\frac{65 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 1110$
$11d = 55$	2 pont	$a_{12} = 120$
$d = 5$ darabbal kell növelnie az eladásokat havonta (ami megfelel a feladat feltételeinek).	1 pont	$d = \frac{120-65}{11} = 5$
Összesen:	**5 pont**	

8.		
$\left(d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25} =\right) 5$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
$\overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} =)$ $\mathbf{r} + \mathbf{q} - \mathbf{p}$	2 pont	$\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{r} + \mathbf{q} - \mathbf{p}$
Összesen:	**2 pont**	

10.		
A zérushely: $x = -6$.	2 pont	
Az értékkészlet: [–1; 5].	2 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

11.		
A 60 perces jegyhez tartozó körcikk középponti szöge 180°, a 90 percesé 108°, a 30 percesé 72°.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megfelelő kördiagram jelmagyarázattal, például: 	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
$\frac{2}{8}$	2 pont	$\left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =\right) \frac{1}{4}$
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a)		
$x^2 - 10x + 25 + 7 = 2x$	1 pont	
$x^2 - 12x + 32 = 0$	1 pont	
$x_1 = 8$, $x_2 = 4$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
Az első egyenletből $y = 1 - x$.	1 pont*	$x = 1 - y$
Ezt a második egyenletbe helyettesítve $0{,}7x + 0{,}2 - 0{,}2x = x$.	1 pont*	$0{,}7 - 0{,}7y + 0{,}2y = 1 - y$
$0{,}2 = 0{,}5x$	1 pont*	$0{,}5y = 0{,}3$
$x = 0{,}4$	1 pont	
$y = 0{,}6$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A második egyenlet mindkét oldalát 5-tel megszorozva $3{,}5x + y = 5x$.	1 pont	*A második egyenletből* $0{,}2y = 0{,}3x$.
Ebből kivonva az első egyenletet $2{,}5x = 5x - 1$.	1 pont	$y = 1{,}5x$
$1 = 2{,}5x$	1 pont	

14. a)		
(Az egyes osztályok létszáma rendre 18 + 14 = 32, 24 + 6 = 30, 18 + 17 = 35 és 12 + 15 = 27.) A legkisebb létszámú osztály a 12.D.	2 pont	
$\left(\frac{15}{12} = 1{,}25\text{, azaz}\right)$ a lányok száma 125%-a ebben az osztályban a fiúk számának.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)

osztály	12.A	12.B	12.C	12.D
lányok létszáma	14	6	17	15

(táblázat fent)	1 pont	
Az adatok terjedelme (17 – 6 =) 11,	1 pont	
átlaga $\left(\frac{14+6+17+15}{4} =\right) 13$,	1 pont	
szórása $\sqrt{\frac{1^2 + (-7)^2 + 4^2 + 2^2}{4}} =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$= \sqrt{17{,}5} \approx 4{,}18$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. c)		
A 12.B-ben az osztályzatok összege $30 \cdot 4{,}1 = 123$,	1 pont	
a lányok osztályzatainak összege $6 \cdot 4{,}5 = 27$.	1 pont	
A fiúk osztályzatainak összege 123 – 27 = 96,	1 pont	
így ezek átlaga 96 : 24 = 4.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó tévedésből egy másik osztály létszámaival számol, akkor legfeljebb 3 pontot kapjon.

15. a) első megoldás		
4,7 tonna = 4700 kg	1 pont	
4700 kg szőlőből 4700 : 1,3 ≈ 3615,4 liter szőlőlé készül,	2 pont	
amiből 3615 : 5 = 723 tasakot tudnak megtölteni.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a) második megoldás		
4,7 tonna = 4700 kg	1 pont	
Egy tasak szőlőlé készítéséhez $5 \cdot 1{,}3 = 6{,}5$ kg szőlőt használnak fel.	2 pont	
4700 : 6,5 ≈ 723,1, a szőlő tehát 723 tasak megtöltéséhez elegendő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b)		
A doboz térfogata $12 \cdot 20 \cdot 25 = 6000\ \text{cm}^3$.	2 pont	$1{,}2 \cdot 2{,}0 \cdot 2{,}5 = 6\ \text{dm}^3$
A doboz 6 literes.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
A telek oldalainak hosszát méterben jelölje $3a$ és $4a$.	1 pont	
A területe ekkor $3a \cdot 4a = 14\,700$.	1 pont	
Ebből ($12a^2 = 14\,700$, $a^2 = 1225$) $a = 35$ (m).	2 pont	
A telek szomszédos oldalainak hossza 105 és 140 (m),	1 pont	$K = 2 \cdot (3a + 4a) = 14a$
kerülete $2 \cdot (105 + 140) = 490$ méter.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	