ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

18. c) **második megoldás**		
Rendezzük meg úgy a sorsolást, hogy 12 „nyert” és 2 „nem nyert” feliratú cédula közül húznak egyet-egyet a családok. Feltehetjük, hogy a Kovács és a Szabó család húz először.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy a Kovács család nyer: $\frac{12}{14}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy miután a Kovács család nyert, a Szabó család is nyer: $\frac{11}{13}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, azaz $\frac{12}{14} \cdot \frac{11}{13} \approx 0{,}725$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. d)		
Jelölje (méterben) egy telek rövidebb oldalát a, hosszabb oldalát b. Ekkor a feladat szövege alapján: $\left.\begin{array}{l} 2a+4b=228 \\ 4a+2b=156 \end{array}\right\}$.	2 pont	
Az első egyenletből $a = 114 - 2b$,	1 pont	*Az első egyenlet kétszereséből a második egyenletet kivonva:*
amit a másodikba helyettesítve és a zárójelet felbontva kapjuk, hogy $456 - 8b + 2b = 156$,	1 pont	$6b = 300$,
amiből $b = 50$ méter,	1 pont	
így $a = (114 - 2 \cdot 50 =)$ 14 méter.	1 pont	
Egy telek területe $14 \cdot 50 = 700$ m^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

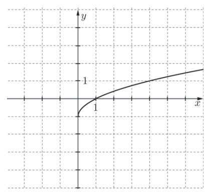
6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
(21 000 · 0,8 =) 16 800 Ft	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\left(\frac{7\cdot 6}{2}=\right)$ 21	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

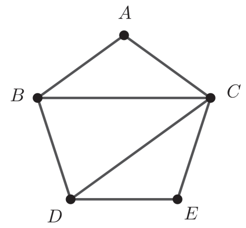
3.		
$\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{2; 5; 7\}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
A vizsgázó az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjából kiindulva,	1 pont	
eltolta azt az y tengely mentén 1 egységgel negatív irányba.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	1 pont	
$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	1 pont	
A két szám legnagyobb közös osztója: $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$\overrightarrow{AB}(1;-5)$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$q=\frac{9}{6}=1,5$	1 pont	
$a_1=(6:1,5=)4$	1 pont	
$S_6=4\cdot\frac{1,5^6-1}{1,5-1}=83,125.$	2 pont	4 + 6 + 9 + 13,5 + 20,25 + + 30,375 = 83,125
Összesen:	**4 pont**	

18. a)		
	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
Egy négyszögöl $\frac{10\,000}{2780} \approx 3,597$ m^2,	1 pont	
tehát egy öl $\sqrt{3,597} \approx 1,9$ méter.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c) első megoldás		
A 14 család közül a 12 nyertest $\binom{14}{12} = 91$-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	2 pont	*A 2 vesztest* $\binom{14}{2}$*-féleképpen lehet kiválasztani.*
Ha mindkét család nyer, akkor a többi 10 nyertest a többi 12 család közül $\binom{12}{10} = 66$-féleképpen lehet kiválasztani (kedvező esetek száma).	2 pont	$\binom{12}{2}$ *olyan eset van, amikor a 2 vesztes család a többi 12 család közül kerül ki.*
A kérdéses valószínűség $\frac{66}{91} \approx 0,725$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. c)		
A keletkező test egy csonkakúp. A csonkakúp alapkörének sugara 12 cm, fedőkörének sugara 6 cm.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A csonkakúp magassága: $\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}$ ($\approx$ 10,4) cm.	1 pont	
A csonkakúp térfogata: $V=\frac{\sqrt{108}\cdot\pi}{3}\cdot(12^2+12\cdot6+6^2)\approx 2742\text{ cm}^3$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. d) első megoldás		
Az egyes sorokba kerülő szőlőtőkék darabszámai egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja 120, n-edik tagja 240.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege alapján $S_n=\frac{120+240}{2}\cdot n=7380$,	1 pont	
amiből $n = 41$ (≥ 20).	1 pont	
Ekkor $240 = 120 + (41 - 1)\cdot d$,	1 pont	
amiből $d = 3$.	1 pont	
Az első 20 sorba $S_{20}=\frac{2\cdot120+19\cdot3}{2}\cdot20=2970$ tőkét ültettek, ennyi tehát az olaszrizlingtőkék száma.	2 pont	$a_{20}=120+19\cdot3=177$ $S_{20}=\frac{120+177}{2}\cdot20=2970$
Összesen:	**7 pont**	

17. d) második megoldás		
Az egyes sorokba kerülő szőlőtőkék darabszámai egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja 120, n-edik tagja 240.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a sorozat differenciája d ($\neq 0$), akkor a tagok száma $n=\frac{240-120}{d}+1$	1 pont	$240=120+(n-1)d$ $d=\frac{120}{n-1}$ *(mivel* $n\neq1$).
$S_n=\frac{2\cdot120+\left(\frac{120}{d}+1-1\right)d}{2}\cdot\left(\frac{120}{d}+1\right)=$ $=180\cdot\left(\frac{120}{d}+1\right)=7380$	1 pont	$\frac{2\cdot120+(n-1)\cdot\frac{120}{n-1}}{2}\cdot n=$ $=180\cdot n=7380$
Ebből $d = 3$,	1 pont	$n = 41$
és $n = 41$ (≥ 20).	1 pont	$d = 3$
Az első 20 sorba $S_{20}=\frac{2\cdot120+19\cdot3}{2}\cdot20=2970$ tőkét ültettek, ennyi tehát az olaszrizlingtőkék száma.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8.		
$(5\cdot4\cdot3=)$ 60	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
B, D	2 pont	*Egy helyes válasz, vagy két helyes és egy hibás válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
(–3; 5)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$\left(r=\sqrt[3]{\frac{1989}{\pi}\cdot\frac{3}{4}}\approx\right)$ 7,8 (cm)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12. első megoldás		
Két kockával 36-féle számpárt dobhatunk (összes eset száma).	1 pont	
A kedvező esetek (kék; piros): (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (3; 1), (3; 2), (2; 1), összesen 15.	2 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{15}{36}\approx0{,}417$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

p\k	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

12. második megoldás		
Két kockával 36-féle számpárt dobhatunk (összes eset száma).	1 pont	
Ezek között 6 eset van, amikor két egyforma számot dobunk, így $\frac{36-6}{2}=15$ olyan eset van, amikor a kék dobás nagyobb, mint a piros.	2 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{15}{36}\approx0{,}417$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

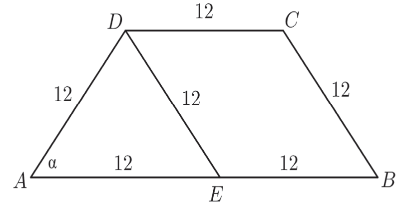
II. A

13. a)		
$(f(1) = (1 + 3)^2 - 2{,}25 =)$ 13,75	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

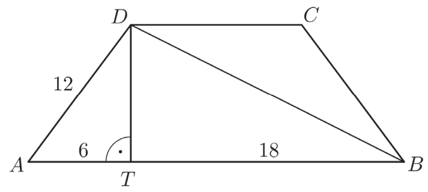
13. b)		
$(x + 3)^2 - 2{,}25 = 0$	1 pont	$\|x + 3\| = 1{,}5$
$x^2 + 6x + 6{,}75 = 0$	1 pont	$x + 3 = 1{,}5$ *vagy* $x + 3 = -1{,}5$
$x = -1{,}5$ és $x = -4{,}5$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

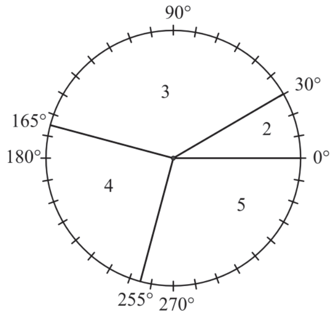
13. c)		
Az f függvénynek az $x = \mathbf{-3}$ helyen **minimuma** van, melynek értéke **–2,25**.	1-1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. d)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Helyes indoklás (pl.: az f függvény minimuma –2,25).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. a) második megoldás		
A D csúcson keresztül párhuzamost húzunk a BC szárral, ami az AB alapot az E pontban metszi. Mivel az $EBCD$ négyszög paralelogramma, ezért EB = 12 cm. 	1 pont	
Az AED háromszög minden oldala 12 cm hosszú, azaz a háromszög szabályos, így a kérdéses szög valóban 60°-os.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b) első megoldás		
Az ABD háromszögben a koszinusztétel alapján: $BD^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos 60°$,	1 pont	*A BCD háromszögben a koszinusztétel alapján:* $BD^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 120°$.
amiből $BD = \sqrt{432} \approx 20{,}8$ cm.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

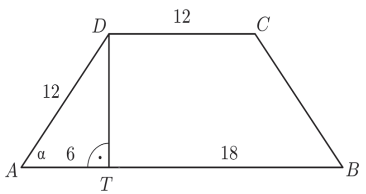
17. b) második megoldás		
 A trapéz DT magasságának hossza (például a Pitagorasz-tétel alapján): $\sqrt{108} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ cm.	1 pont	
A DTB háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $BD^2 = 18^2 + \sqrt{108}^2 = 432$,	1 pont	
amiből $BD = \sqrt{432} \approx 20{,}8$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Helyes kördiagram, például: 	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. e)

A két kettes osztályzatú dolgozatot mindenképpen kiválasztja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A többi osztályzat esetében $\binom{9}{2}=36$, $\binom{6}{2}=15$, illetve $\binom{7}{2}=21$ lehetőség van.	2 pont	
A megfelelő kiválasztások száma: $36\cdot15\cdot21 = 11\ 340$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) első megoldás

A trapéz D-ből induló magasságának T talppontja az AB alapot egy $\left(\frac{24-12}{2}=\right)$ 6 cm hosszú és egy (24 – 6 =) 18 cm hosszú szakaszra osztja. 	1 pont	
Az így keletkező ATD derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele, így a kérdéses szög valóban 60°-os.	2 pont	$\cos\alpha=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, így $\alpha = 60°$.
Összesen:	**3 pont**	

14. a) első megoldás

A feladat szövege alapján: $AE = EC = x$, $EB = 12 - x$.	2 pont	$EB = y$, $AE = EC = 12 - y$
Az EBC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $(12-x)^2+6^2=x^2$.	1 pont	$y^2+6^2=(12-y)^2$
$180 = 24x$	1 pont	$y = 4{,}5$
$x = 7{,}5$ cm valóban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a) második megoldás

Ha $AE = 7{,}5$ cm, akkor $EB = 12 - 7{,}5 = 4{,}5$ cm.	1 pont	
Mivel $4{,}5^2+6^2=7{,}5^2$, ezért ekkor $EC = 7{,}5$ cm valóban (tehát $AECF$ négyszög valóban egy 7,5 cm oldalú rombusz).	2 pont	
Ha AE rövidebb (hosszabb) lenne, mint 7,5 cm, akkor EB hosszabb (rövidebb) lenne, mint 4,5 cm, így ekkor EC hosszabb (rövidebb) lenne, mint 7,5 cm, tehát $AECF$ nem lenne rombusz. (Tehát a rombusz oldalhosszának az egyetlen lehetséges értéke valóban 7,5 cm.)	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)

A rombusz A és C csúcsnál lévő α belső szöge egyenlő a BEC szöggel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\sin\alpha=\frac{6}{7{,}5}$	1 pont	*A rombusz AC átlója felezi az α szöget, így* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{6}{12}$.
Ebből $\alpha \approx 53{,}1°$.	1 pont	
Az E és F csúcsnál lévő belső szögek nagysága (180° – 53,1° =) 126,9°.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c)

A téglalap területe $12\cdot6 = 72$ cm^2,	1 pont	$\frac{T_{\text{rombusz}}}{T_{\text{téglalap}}}=\frac{AE}{AB}$
a rombusz területe $7{,}5\cdot6 = 45$ cm^2.	1 pont	
$\frac{45}{72}=0{,}625$	1 pont	$\frac{7{,}5}{12}=0{,}625$
Így a rombusz területe 62,5%-a a téglalap területének.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megoldásában közelítő értékeket is használ, akkor ezért ne veszítsen pontot.

15. a)		
2022-től 2100-ig 78 év telik el,	1 pont	
így $8 \cdot 1{,}01^{78} \approx$	1 pont	
$\approx 17{,}38$ milliárd fő élne 2100 végén a Földön.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
(Jelölje n a 2022 után eltelő évek számát.) A feladat szövege alapján $8 \cdot 1{,}01^n = 12$.	1 pont	
$1{,}01^n = 1{,}5$	1 pont	
$n = \log_{1,01} 1{,}5 \left(= \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}01}\right) \approx 40{,}75$	2 pont	
Tehát (2022 + 41 =) 2063-ban érné el a Föld népessége a 12 milliárd főt.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó évről évre (helyes kerekítéssel) kiszámolja a Föld népességét, és ez alapján helyes választ ad, akkor a teljes pontszám jár.

15. c) első megoldás		
(2100 – 2022 = 78, így) ha q-val jelöljük azt, hogy évről évre hányszorosára nő a népesség, akkor $8 \cdot q^{78} = 10{,}35$.	1 pont	
$q = \sqrt[78]{\frac{10{,}35}{8}} \approx 1{,}0033$	2 pont	
Évente kb. 0,33%-kal kellene növekednie a népességnek.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c) második megoldás		
(2100 – 2022 = 78, így) ha p a növekedés százalékos értéke, akkor $8 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{78} = 10{,}35$.	2 pont	
$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[78]{\frac{10{,}35}{8}}$	1 pont	
$p \approx 0{,}33$ (Tehát évente kb. 0,33%-kal kellene növekednie a népességnek.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a) első megoldás		
Nem választotta a 16-os feladatot a vizsgázók 25%-a (6 fő), nem választotta a 17-es feladatot a vizsgázók 37,5%-a (9 fő).	2 pont	
Így a 18-ast (100 – 25 – 37,5 =) 37,5% (9 fő) nem választotta,	1 pont	*A vizsgázóknak ez a (25 + 37,5 =) 62,5 százaléka választotta a 18-as feladatot.*
azaz 15 fő, tehát a vizsgázók 62,5%-a választotta a 18-as feladatot.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. a) második megoldás		
Ha a 18-as feladatot választók százalékos aránya x, akkor a 75, a 62,5 és az x összeadásakor minden vizsgázót kétszer számolunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó az $75 + 62{,}5 + x = 200$ egyenlet,	2 pont	
amelyből $x = 62{,}5$, azaz a vizsgázók 62,5%-a választotta a 18-as feladatot.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b)		
Az osztályzatok átlaga: $\frac{2 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{24} =$	1 pont	
$= 3{,}75$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. c)		
Az adatok módusza 3,	1 pont	
mediánja 4,	1 pont	
terjedelme 3.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. d)		
Az egy diákhoz tartozó középponti szög $\frac{360°}{24} = 15°$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az egyes osztályzatokhoz tartozó középponti szögek nagysága: 2-es: 30°, 3-as: 135°, 4-es: 90°, 5-ös: 105°.	1 pont	