ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. október 17.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

18. b)		
Egy párna felszíne két körgyűrűből, valamint a belső, illetve a külső hengerpalástból áll.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A körgyűrű területe a nagy és a kisebb kör területének különbsége: $21^2 \cdot \pi - 9^2 \cdot \pi \approx 1131$ cm^2.	1 pont*	
A belső hengerpalást területe: $2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 396$ cm^2.	1 pont*	
A külső hengerpalást területe: $2 \cdot 21 \cdot \pi \cdot 7 \approx 924$ cm^2.	1 pont*	
Egy párna felszíne: $2 \cdot 1131 + 396 + 924 = 3582$ cm^2.	1 pont*	
30 db párna felszíne: $30 \cdot 3582 = 107\,460$ cm^2 =	1 pont	
= 10,746 m^2.	1 pont	
Tehát (a kért kerekítéssel) 11 m^2 szövetre van szükség.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A párna felszínét megkapjuk, ha a nagy henger felszínéből kivonjuk a kis henger felszínét, és a különbséghez hozzáadjuk a belső hengerpalást területének kétszeresét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A nagy henger felszíne: $2 \cdot 21^2 \cdot \pi + 2 \cdot 21 \cdot \pi \cdot 7 \approx 3695$ cm^2.	1 pont	
A kis henger felszíne: $2 \cdot 9^2 \cdot \pi + 2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 905$ cm^2.	1 pont	
A belső hengerpalást területe: $2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 396$ cm^2.	1 pont	
Egy párna felszíne: $3695 - 905 + 2 \cdot 396 = 3582$ cm^2.	1 pont	

18. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy párna nem lesz selejtes: 0,97.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy a 30 darab között nem lesz selejtes párna: $0{,}97^{30} \approx 0{,}401$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a párnák közt pontosan egy selejtes lesz: $\binom{30}{1} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{29} \approx 0{,}372$.	2 pont	
Tehát a kérdezett valószínűség 0,401 + 0,372 = 0,773.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$1848 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\left(\frac{5 \cdot 8}{4} =\right) 10$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Az átfogó hossza (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{10^2 + 24^2} =$	1 pont	
= 26 (cm).	1 pont	
(A keresett szöget jelölje α.) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{24}$ ($\approx 0{,}417$)	1 pont	
$\alpha \approx 22{,}62°$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4.		
C	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$(6 \cdot 6300 - 5 \cdot 7500 =)$ 300 Ft-tal	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Az átlag: $\left(\frac{9+5+6+9+6+6+8}{7} = \frac{49}{7} =\right) 7$ °C	1 pont	
A terjedelem: 4 °C	1 pont	
A medián: 6 °C	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
5	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: 1 pont jár annak megállapításáért, hogy összesen 15 golyó van a dobozban.

17. d)		
A teljes árú jegy árát (Ft-ban) jelölje x, a gyorsvonati pótjegy árát pedig y. Ekkor a 20%-os mérséklésű jegy ára $0{,}8x$, az 50%-os mérséklésű jegy ára $0{,}5x$, a 90%-os mérséklésű jegy ára pedig $0{,}1x$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A két család által vásárolt jegyekre egy-egy egyenlet írható fel. Megoldandó a két egyenletből álló egyenletrendszer.) $2x + 0{,}8x + 0{,}5x + 4y = 7960$, azaz $3{,}3x + 4y = 7960$.	1 pont	
$5 \cdot 0{,}1x + 5y = 1975$, azaz $0{,}5x + 5y = 1975$.	1 pont	
A második egyenletből $y = 395 - 0{,}1x$,	1 pont*	*Az első egyenletből $y = 1990 - 0{,}825x$.*
ezt az első egyenletbe helyettesítve $3{,}3x + 1580 - 0{,}4x = 7960$ adódik,	1 pont*	*A másodikba helyettesítve $9950 - 3{,}625x = 1975$.*
ahonnan (a teljes árú menetjegy ára) $x = 2200$ (Ft),	1 pont	
majd (a gyorsvonati pótjegy ára) $y = 175$ (Ft).	1 pont	
Ellenőrzés: (A 20%-os mérséklésű menetjegy 1760 Ft, az 50%-os 1100 Ft, a 90%-os 220 Ft.) A Kiss család $2 \cdot 2200 + 1760 + 1100 + 4 \cdot 175 = 7960$ Ft-ért, a Nagy család pedig $5 \cdot 220 + 5 \cdot 175 = 1975$ Ft-ért vásárolt jegyeket valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az első egyenlet ötszöröséből kivonva a második egyenlet négyszeresét: $14{,}5x = 31\,900$.	2 pont	

18. a)		
A nagy henger alapkörének sugara 21 cm, a kis henger alapkörének sugara 9 cm (a test magassága $m = 7$ cm).	1 pont	
A nagy henger térfogata: $21^2 \cdot \pi \cdot 7 \approx 9698$ cm³.	1 pont	
A kis henger térfogata: $9^2 \cdot \pi \cdot 7 \approx 1781$ cm³.	1 pont	
A szivacsos rész térfogata a két henger térfogatának különbsége, azaz 7917 cm³.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) első megoldás		
A kerékpárszállító kocsi helyét 7-féleképpen,	1 pont	
az étkezőkocsi helyét ezután 6-féleképpen választhatjuk ki (a másodosztályú kocsik helye ezután adott),	1 pont	
ezért $7 \cdot 6 = 42$-féle sorrendben állítható össze a hét kocsi.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. a) második megoldás		
A másodosztályú kocsik helyét $\binom{7}{5} = 21$-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
A további két kocsit ezután 2-féle sorrendben helyezhetjük el a maradék két helyre,	1 pont	
ezért $21 \cdot 2 = 42$-féle sorrendben állítható össze a hét kocsi.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. a) harmadik megoldás		
A 7 kocsit 7! (= 5040)-féleképpen állíthatják sorba.	1 pont	*A lehetséges sorrendek száma egyenlő 7 olyan elem ismétléses permutációinak számával, melyek közül 5 elem egyforma.*
A másodosztályú kocsikat azonban nem különböztetjük meg egymástól. Ezek lehetséges sorrendjeinek száma 5! (= 120).	1 pont	
Így $\frac{7!}{5!} = 42$-féle sorrendben állítható össze a hét kocsi.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b)		
A kedvezmény nélküli ár $3040 : 0{,}95 =$	1 pont	
$= 3200$ (Ft).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. c)		
Egy jegy ára az automatás kedvezménnyel $280 \cdot 0{,}95 = 266$ Ft.	1 pont	
(Tegyük fel, hogy Ábel *n*-szer utazott.) $2140 < n \cdot 266$ $8{,}05 < n$	1 pont	$2140 : 266 \approx 8{,}05$
Ezért a havi tanulóbérlet ára 8 kedvezményes menetjegy áránál több, de 9 menetjegy áránál már kevesebb.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ábel 9-szer utazott januárban ezen a távolságon.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
$(a+1)(a-1) = a^2 - 1$	1 pont	
$(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$	1 pont	
Összevonás után: $2a^2 + 8a + 15$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
Az üzemanyag tömege $60\,000 \cdot 0{,}85 = 51\,000$ kg =	1 pont	
= 51 t.	1 pont	
A tele tartálykocsi tömege (51 + 23,8 =) 74,8 tonna.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A kör középpontja (2; 4),	1 pont	
sugara 5.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
A függvény zérushelye (x =) 9.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12. első megoldás		
Kedvező esetek: FII, IFI és IIF (3 eset).	1 pont	
Az összes eset száma: (2^3 =) 8.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{3}{8}$ (= 0,375).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12. második megoldás		
(Binomiális eloszlással számolva.) A keresett valószínűség $\binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	2 pont	
$= \frac{3}{8}$ (= 0,375).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a binomiális együtthatót elhagyja, és így válasza $\frac{1}{8}$, *akkor 1 pontot kapjon.*

II. A

13. a)		
$(f(3,5) = (3,5-3)^2 + 2 =)$ 2,25	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b) első megoldás		
$(x-3)^2 + 2 = 6$	1 pont	
Nullára rendezve: $x^2 - 6x + 5 = 0$.	1 pont	
$x = 1$ vagy $x = 5$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. b) második megoldás		
$(x-3)^2 + 2 = 6$, azaz $(x-3)^2 = 4$.	1 pont	
Tehát $x - 3 = 2$ vagy $x - 3 = -2$.	2 pont	
Innen $x = 5$ vagy $x = 1$.	1 pont	*Ez a pont csak akkor jár, ha mindkét választ megadja a vizsgázó.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó grafikusan oldja meg a feladatot, akkor 2 pont jár az f grafikonjának helyes felrajzolásáért, 1 pont jár a két megfelelő érték leolvasásáért, és további 1 pont jár a leolvasott értékek ellenőrzéséért.

13. c)		
B	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

13. d) első megoldás		
Nullára rendezve: $x^2 - 6x + 8 \le 0$.	1 pont	
Az $x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenlet gyökei 2 és 4,	1 pont	
a két gyök között lesz a bal oldal értéke negatív (tehát a valós számok halmazán az egyenlőtlenség megoldása $2 \le x \le 4$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az egész megoldások tehát: 2, 3 és 4.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
(A mértani sorozat n-edik tagját jelölje a_n.) Az első kilenc tag összege: $a_1 \cdot \frac{3^9 - 1}{3 - 1} = 59\,046$.	1 pont	
$a_1 \cdot 9841 = 59\,046$	1 pont	
Innen $a_1 = 6$.	1 pont	
$a_9 = a_1 \cdot q^8 = 6 \cdot 3^8 = 39\,366$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d)		
$50\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 59\,046$	2 pont	$50\,000 \cdot x^3 = 59\,046$
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 1{,}18092$	1 pont	$x^3 = 1{,}18092$
$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{1{,}18092} \approx 1{,}057$	1 pont	$x \approx 1{,}057$
Így p értéke kb. 5,7.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II. B

16. a) első megoldás		
Ha Janka n darab ötöst szerzett, akkor a feladat szövege alapján: $\frac{3+3+4+5n}{3+n}=4,5.$	2 pont	*Ha összesen m jegye volt:* $\frac{3+3+4+5(m-3)}{m}=4,5.$
$10 + 5n = 13,5 + 4,5n$ $0,5n = 3,5$	1 pont	$5m - 5 = 4,5m$
Innen $n = 7$, tehát 7 ötöst kapott Janka.	1 pont	$m = 10$, *tehát Janka* $(10 - 3 =)$ *7 ötöst kapott.*
Összesen:	**4 pont**	

16. a) második megoldás		
Ha Janka még 7 ötöst kapott,	1 pont	
akkor éppen 4,5 lett az átlaga, hiszen $\frac{3+3+4+7\cdot 5}{10}=4,5.$	2 pont	
Annak helyes indoklása, hogy más megoldás nem lehetséges (pl. ennél kevesebb ötös esetén 4,5-nél rosszabb, ennél több ötös esetén pedig 4,5-nél jobb lesz az átlaga). Tehát Janka csak 7 ötöst kaphatott.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b) első megoldás		
Janka az első évben $12 \cdot 1000 = 12\,000$ Ft, a második évben $12 \cdot 2000 = 24\,000$ Ft, és így tovább, az utolsó évben $12 \cdot 12\,000 = 144\,000$ Ft zsebpénzt kap.	1 pont	
Az évente kapott összegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja és differenciája is 12 000, és az első 12 tagot kell összegezni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ez az összeg $S_{12}=\frac{2\cdot 12\,000+(12-1)\cdot 12\,000}{2}\cdot 12=$	1 pont	$S_{12}=\frac{12\,000+144\,000}{2}\cdot 12$
= 936 000 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

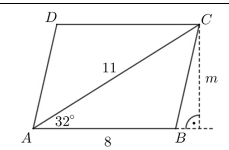
16. b) második megoldás		
A 12 év alatt kapott összeg: $12 \cdot 1000 + 12 \cdot 2000 + \ldots + 12 \cdot 12\,000 =$	1 pont	
$= 12 \cdot (1000 + 2000 + \ldots + 12\,000) =$	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$= 12 \cdot 1000 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12) = 12 \cdot 1000 \cdot 78 =$	1 pont	
= 936 000 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

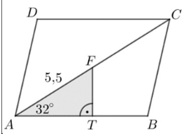
13. d) második megoldás		
Teljes négyzetté alakítva és rendezve: $(x-3)^2 \le 1$.	1 pont	
$\lvert x-3\rvert \le 1$	1 pont	
Tehát $x - 3$ lehetséges egész értékei –1, 0 és 1,	1 pont	$-1 \le x - 3 \le 1$
így x lehetséges egész értékei 2, 3 és 4.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a valós számok halmazán oldja meg az egyenlőtlenséget, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó (pl. próbálgatás után) helyesen felsorolja a megoldásokat, akkor ezért 2 pontot kapjon. További 2 pont jár annak indoklásáért, hogy más megoldás nincs.

14. a)		
A CAB háromszögben koszinusztétellel: $BC^2=11^2+8^2-2\cdot 11\cdot 8\cdot\cos 32°$ ($\approx 35,74$).	2 pont	
Innen $BC \approx 6$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b) első megoldás		
A terület a CAB háromszög területének kétszerese.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T=2\cdot\frac{11\cdot 8\cdot\sin 32°}{2}\approx$	1 pont	*Hérón-képlettel:* $T\approx 2\sqrt{12,5\cdot 1,5\cdot 4,5\cdot 6,5}\approx$
$\approx 46,6$ cm^2	1 pont	$\approx 46,8$ cm^2
Összesen:	**3 pont**	

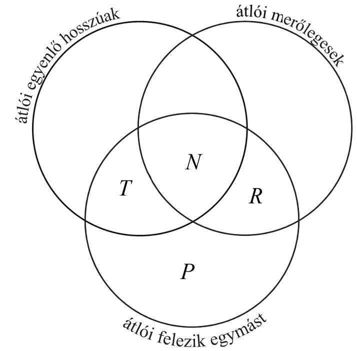
14. b) második megoldás		
(Meghatározzuk a paralelogramma AB oldalához tartozó m magasságát.) $\sin 32°=\frac{m}{11}$	1 pont	
Innen $m \approx 5,83$ cm.	1 pont	
$T = 8 \cdot m \approx 46,6$ cm^2	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c)		
 Az AFT derékszögű háromszögben: $\cos 32° = \frac{AT}{5,5}$,	1 pont	*FT szakasz hossza fele a paralelogramma magasságának: $FT = 2,915$ cm.*
ahonnan $AT \approx 4,66$ cm.	1 pont	*Pitagorasz-tétellel:* $AT = \sqrt{5,5^2 - 2,915^2} \approx$ $\approx 4,66$ cm.
A másik szakasz: $TB = 8 - AT = 3,34$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. d) első megoldás		
Az egyik színt kétszer kell használnunk. Ezt a színt 3-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Ezzel a színnel két szemközti tartományt kell kiszíneznünk. Ezt a két tartományt 2-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
A maradék két tartományt a maradék két színnel 2-féleképpen színezhetjük ki.	1 pont	
Így $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ megfelelő színezési lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. d) második megoldás		
Tegyük fel, hogy a felső tartományt pirosra színezzük. Ha a bal és a jobb oldali tartomány különböző színű (az egyik sárga, a másik kék), akkor az alsó tartomány csak piros lehet. Ez 2 lehetőség.	1 pont	
Ha (a felső tartomány piros, és) a bal és a jobb oldali tartomány azonos színű (mindkettő sárga vagy mindkettő kék), akkor az alsó tartományt csak az addig fel nem használt színnel színezhetjük. Ez is 2 lehetőség.	1 pont	
Ugyanígy (2 + 2 =) 4 lehetőség van akkor, ha a felső tartomány sárga vagy kék.	1 pont	
Így $3 \cdot 4 = 12$ megfelelő színezési lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a színezési lehetőségeket rendezetten és helyesen felsorolja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

15. a)		
	7 pont	*Az N megfelelő elhelyezéséért 1 pont, a T, R és P megfelelő elhelyezéséért 2-2 pont jár. Ha a T, R vagy P elhelyezésekor egy szempont szerint hibázik a vizsgázó, akkor annak a négyszögnek az elhelyezéséért 1 pontot kapjon.*
Összesen:	**7 pont**	

15. b)		
Az I. állítás hamis.	1 pont	
Helyes indoklás (pl. jó ellenpélda).	1 pont	*Pl.* $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 3\}$.
A II. állítás igaz.	1 pont	
Az elemek: 16, 25, 36, 49, 64 és 81.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	