ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. október 15.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

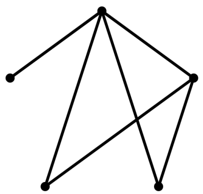
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$A \cap B = \{1; 2; 4\}$	1 pont	
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 8\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{3\}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2.		
Egy megfelelő gráf, például: 	2 pont	*Nem egyszerű gráf is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
(22 + 17 – 30 =) 9-en vásároltak mindkét fajta kenyérből.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$a_4 = \left(\frac{6+36}{2} =\right) 21$	2 pont	$d = 5$
Összesen:	**2 pont**	

5.		
D	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$\left(\frac{8 \cdot 5}{2} =\right) 20$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
Ha a középső medencében elsőfokú jelzés van, akkor a két szélsőben bármilyen jelzés lehet.	1 pont	
Ez $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség.	1 pont	
Ha a középső medencében alap- vagy másodfokú jelzés van, akkor a két szélsőben kétféle lehet.	1 pont	
Ez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőség.	1 pont	
Összesen (9 + 8 =) 17-féle viharjelzés adható ki a Balaton egészére vonatkozóan.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet rendezetten felsorolva helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

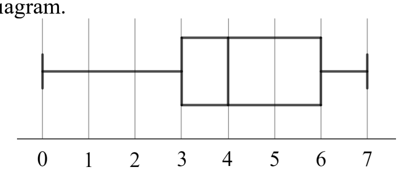
nyugati	0					1							2				
középső	0		1			0		1			2		1			2	
keleti	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	1	2	1	2

18. c)		
A csonkakúp alapkörének sugara $\frac{11000}{2\pi} \approx 1751$ m.	1 pont	
A csonkakúp térfogata: $\frac{330 \cdot \pi}{3}(1751^2 + 1751 \cdot 600 + 600^2) \approx$	1 pont	
$\approx 1\,547\,000\,000$ m^3 =	1 pont	
= 1,547 km^3.	1 pont	
Tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. d)		
Az egyes években megtermelt bormennyiségek (hektoliterben mérve) egy olyan mértani sorozat első tíz tagját alkotják, amelynek hányadosa 1,05, és az első tíz tag összege 1000.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$a_1 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{1{,}05 - 1} = 1000$	1 pont	
Ebből $a_1 \approx 79{,}5$ hektoliter az első évre tervezett mennyiség.	1 pont	
A 10. évben pedig $a_{10} = 79{,}5 \cdot 1{,}05^9 \approx 123{,}3$ hektoliter a tervezett termelés.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. b) második megoldás		
Egy csoportban $\left(\frac{4\cdot 3}{2}=\right)6$ mérkőzést játszanak.	1 pont	
Ha a csoportban nincs döntetlen, akkor minden mérkőzésen összesen 3 pontot szerez a két csapat, tehát ebben az esetben 18 lenne a pontszámok összege. Minden döntetlenül végződő mérkőzés ezt a pontszámot 1-gyel csökkenti (mert összesen 3 helyett csak 1 + 1 = 2 pontot szereznek a csapatok a mérkőzésen).	1 pont	
A megadott esetben a pontszámok összege 16,	1 pont	
tehát a mérkőzések közül kettő végződött döntetlenre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c)		
Az átlag $\left(\frac{2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 3+10\cdot 4+2\cdot 5+8\cdot 6+3\cdot 7}{32}=\right)4{,}1875.$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. d)		
minimum: 0; alsó kvartilis: 3; medián: 4; felső kvartilis: 6; maximum: 7	4 pont	*A minimum és a maximum helyes megadása összesen 1, a többi helyesen megadott érték 1-1 pontot ér.*
Jó diagram. 	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

minimum	alsó kvartilis	medián	felső kvartilis	maximum
0	3	4	6	7

18. a)		
Ha 12 másodperc alatt 9 felvillanást látunk, akkor 60 másodperc alatt 45-öt látnánk,	1 pont	
azaz elsőfokú viharjelzés van érvényben.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A súlyvonal felezi az 5 cm-es oldalt.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A Pitagorasz-tétel alapján $s^2=2{,}5^2+6^2$.	1 pont	
A súlyvonal hossza $s = 6{,}5$ cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
Akkor lesz 4-gyel osztható a szám, ha 24-re, 32-re vagy 52-re végződik.	1 pont	3524, 5324, 4532, 5432, 3452, 4352
Mindhárom esetben 2-féle szám képezhető.	1 pont	
Tehát összesen $2\cdot 3=6$ megfelelő szám készíthető.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
Bélának $\left(\frac{6500}{5}\cdot 4=\right)5200$ pontja van.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
(Mivel a jegyek átlaga 4, így a jegyek szórása $\sqrt{\frac{4\cdot 1^2}{8}}=)\sqrt{\frac{1}{2}}\approx 0{,}707$.	2 pont	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Összesen:	**2 pont**	

11.		
A kvóciens $10^3=1000$.	1 pont	
Az első tag $\left(\frac{a_8}{q^7}=\frac{10^{20}}{(10^3)^7}=\frac{10^{20}}{10^{21}}=\right)10^{-1}=0{,}1$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A két kockával 36-félét dobhatunk (összes eset).	1 pont	
A dobott számok összege 4 vagy 9 lehet, a lehetséges dobások: 1-3, 2-2, 3-1, 3-6, 4-5, 5-4, 6-3. Így a kedvező esetek száma 7.	2 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{7}{36}\approx 0{,}194$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)		
Az egyenletben szereplő törteket közös nevezőre hozva $\frac{5x+15}{20}+\frac{4x+4}{20}=-\frac{10x}{20}$.	2 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az egyenlet mindkét oldalát helyesen szorozza meg 20-szal.*
Az egyenletet rendezve: $9x + 19 = -10x$.	1 pont	
$x = -1$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
$b(60)=6\cdot 1{,}015^{60}\approx 14{,}7$ ezer	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. c)		
Megoldandó a $600=6\cdot 1{,}015^{p}$ egyenlet.	1 pont	
Ebből $100=1{,}015^{p}$.	1 pont	
$p=\log_{1{,}015}100\approx 309$ perc	1 pont	$p=\frac{\lg 100}{\lg 1{,}015}$
Tehát a 6. órában éri el a becslés szerint a baktériumok száma a 600 ezret.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. a) első megoldás		
A 3-as méretű labda sugara 9 cm, az 5-ös méretű labda sugara 10,75 cm.	1 pont	
A 3-as méretű labda térfogata $\frac{4}{3}\cdot 9^3\cdot\pi\approx 3054$ cm^3,	1 pont	
az 5-ös méretű labda térfogata $\frac{4}{3}\cdot 10{,}75^3\cdot\pi\approx 5204$ cm^3.	1 pont	
A térfogatok aránya $\frac{5204}{3054}\approx 1{,}7$,	1 pont	
tehát az 5-ös méretű labda térfogata kb. 70%-kal nagyobb, mint a 3-as méretű labda térfogata.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a) második megoldás		
Bármely két gömb hasonló.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbével egyenlő.	1 pont	
A 3-as és 5-ös labdák esetében a hasonlóság aránya $\frac{21{,}5}{18}\approx 1{,}194$,	1 pont	
így a térfogatok aránya $1{,}194^3\approx 1{,}7$.	1 pont	
Az 5-ös méretű labda térfogata kb. 70%-kal nagyobb, mint a 3-as méretű labda térfogata.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. b) első megoldás		
Minden csapat három mérkőzést játszott a csoportkörben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Amelyik csapat 7 pontot szerzett, az biztosan (kétszer nyert, és) egyszer játszott döntetlent. Amelyik 5 pontot szerzett, az biztosan (egyszer nyert, és) kétszer játszott döntetlent. Amelyik 4 pontot szerzett, az biztosan (egyszer nyert, egyszer vesztett, és) egyszer játszott döntetlent. (Amelyik csapat 0 pontot szerzett, az háromszor kikapott.)	2 pont	
Tehát (a 4 döntetlen csapateredmény miatt) a mérkőzések közül kettő végződött döntetlenre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
A csomagok száma a 72-nek és a 96-nak is osztója, ezért a 72 és a 96 legnagyobb közös osztóját kell meghatározni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$72 = 2^3 \cdot 3^2$	1 pont	*72 osztóinak felsorolása.*
$96 = 2^5 \cdot 3$	1 pont	*96 osztóinak felsorolása.*
Tehát Emese legfeljebb (72; 96) = 24 csomagot tud összeállítani a feltételeknek megfelelően.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen válaszol, de nem indokolja, hogy 24-nél több csomagot nem lehet összeállítani, akkor 2 pontot kapjon.

16. d)		
Az összes eset száma $\binom{25}{5} = 53\,130$.	1 pont	
A kedvező esetek száma $\binom{10}{2}\binom{15}{3} = 20\,475$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{20\,475}{53\,130} \approx 0{,}385$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a)		
$f(2,5) = ((2,5-3)^2 - 4 =) -3,75$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. b)		
Megoldandó az $(x-3)^2 - 4 = 0$ egyenlet.	1 pont	
$x^2 - 6x + 5 = 0$	1 pont	$\lvert x-3 \rvert = 2$
A zérushelyek: $x = 1$ és $x = 5$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
$d_{PQ} = \sqrt{(6-2)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. d) első megoldás		
Az egyenes meredeksége: $m = \left(\frac{5-(-3)}{6-2} = \right) 2$.	2 pont	
Az $y = 2x + b$ egyenletbe például P koordinátáit helyettesítve $-3 = 2 \cdot 2 + b$,	1 pont	*Az $y - y_0 = m(x - x_0)$ egyenletbe helyettesítve a megfelelő értékeket: $y + 3 = 2(x - 2)$ vagy $y - 5 = 2(x - 6)$.*
amiből $b = -7$. Tehát $y = 2x - 7$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. d) második megoldás		
Az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban keresve megoldandó a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{array}{r} -3 = m \cdot 2 + b \\ 5 = m \cdot 6 + b \end{array}\right\}$.	1 pont	
Ebből (például a második egyenletből kivonva az elsőt és rendezve) $m = 2$,	2 pont	
majd $b = -7$, így az egyenes egyenlete $y = 2x - 7$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. d) harmadik megoldás		
Az egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{PQ} = (6-2; 5-(-3)) = (4; 8)$.	2 pont	*Az egyenes egy normálvektora (8; –4).*
Az egyenes egyenlete $8x - 4y = 28$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a két pontra illeszkedő egyenes egyenletére vonatkozó képletbe jól helyettesít be, és az alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

15. a)		
A paralelogramma területe: $T_{ABCD} = 5 \cdot 6 \cdot \sin 70° \approx$	1 pont	*A paralelogramma AB oldalhoz tartozó magassága* $m = 5 \cdot \sin 70° \approx 4{,}7$ cm.
$\approx 28{,}2$ cm^2.	1 pont	$T = 6 \cdot 4{,}7 = 28{,}2$ cm^2
Összesen:	**2 pont**	

15. b)		
A koszinusztétel alapján $BD^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 70° \approx 40{,}48$.	1 pont	
$BD \approx 6{,}36$ cm	1 pont	
A szinusztétel alapján: $\frac{\sin\beta}{\sin 70°} = \frac{5}{6{,}36}$,	1 pont*	$\sin\beta = \frac{m}{BD} = \frac{4{,}7}{6{,}36}$
amiből $\sin\beta \approx 0{,}7388$.	1 pont*	
Ebből $\beta \approx 47{,}6°$ (a kiegészítő szög 132,4°, ami nem lehetséges).	1 pont	
A másik ismeretlen szög: $\gamma = 180° - 70° - 47{,}6° = 62{,}4°$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*A *-gal jelölt 2 pontot a vizsgázó a következő gondolatmenetért is megkaphatja:*

$5^2 = 6^2 + 6{,}36^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6{,}36 \cdot \cos\beta$	1 pont	
$\cos\beta \approx 0{,}6741$	1 pont	

15. c)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő ellenpélda megadása (egy olyan húrtrapéz vagy deltoid, amely nem paralelogramma).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

15. d)		
Az állítás megfordítása: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor tengelyesen is szimmetrikus.	1 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő ellenpélda megadása (egy olyan paralelogramma, amely nem rombusz és nem is téglalap).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. B

16. a) első megoldás		
1 kg kristálycukor árát forintban jelölje k, 1 kg barna cukorét b. Ekkor a feladat szövege alapján: $\left.\begin{array}{l} 4k + b = 2600 \\ 3k + 2b = 3275 \end{array}\right\}$.	1 pont	
Az első egyenletből $b = 2600 - 4k$.	1 pont	*Az első egyenletet 2-vel megszorozva,*
Ezt a második egyenletbe helyettesítve $3k + 5200 - 8k = 3275$.	1 pont	*és ebből a második egyenletet kivonva* $5k = 1925$.
Innen $k = 385$ (1 kg kristálycukor ára 385 Ft),	1 pont	
és $b = (2600 - 4 \cdot 385 =)\ 1060$ (1 kg barna cukor ára 1060 Ft).	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. a) második megoldás		
Mivel Emese mindkét esetben 5 kg cukrot vesz, csak a második esetben 1 kg kristálycukrot 1 kg barna cukorra cserél, ebből következik, hogy 1 kg barna cukor 3275 – 2600 = 675 Ft-tal drágább 1 kg kristálycukornál.	2 pont	
Tehát, ha 1 kg kristálycukor ára k Ft, akkor $4k + k + 675 = 2600$.	1 pont	
Azaz $k = 385$ (1 kg kristálycukor ára 385 Ft),	1 pont	
és 385 + 675 = 1060 Ft 1 kg barna cukor ára.	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b)		
1 uncia $= \frac{1}{35{,}3}$ kg $\approx 0{,}0283$ kg $= 28{,}3$ g	1 pont	1 uncia $= \frac{1000}{35{,}3}$ g $\approx 28{,}3$ g
5 uncia = 141,5 g	1 pont	
Tehát a kért kerekítéssel 140 gramm cukrot kell Emesének kimérnie.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	