ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

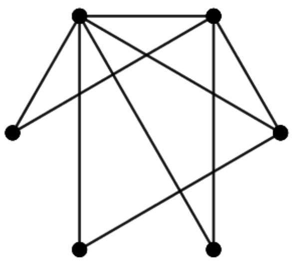
1.		
$A \cap B = \{1; 3; 5\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{2; 4\}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
60	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

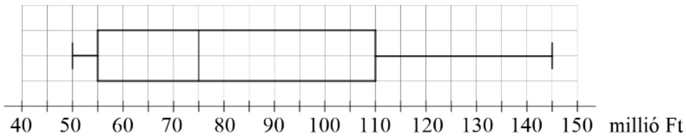
3.		
$x = 3$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
580 ezer forint	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
(Az 5 cm hosszú oldallal szemközti szöget jelölje α. A szinusztétel alapján:) $\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{5}{6}$.	1 pont	
$\sin\alpha \approx 0{,}7217$	1 pont	
$\alpha \approx 46{,}2°$ (Az α nem lehet tompaszög.)	1 pont	
	3 pont	

6.		
Egy megfelelő gráf, például: 	2 pont	*Nem egyszerű gráf is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3^3 \cdot \pi}{3} = 18\pi\right) \approx 56{,}5\ \text{cm}^3$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">8.</td></tr>
<tr><td>(A minimum 50, az alsó kvartilis 55, a medián 75, a felső kvartilis 110, a maximum 145 millió Ft.)

</td><td>4 pont</td><td>A minimum és maximum meghatározása összesen 1, a medián 1, az alsó és a felső kvartilis meghatározása összesen 1 pontot ér. A kapott adatokból készített diagramért 1 pont jár.</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
</table>

9.		
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$	1 pont	
$\overrightarrow{BE} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{c})$	2 pont	$2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$
Összesen:	**3 pont**	

10.		
$y = 2x + 1$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$q = \left(\frac{36}{24} =\right) 1{,}5$	1 pont	
$a_1 = \left(\frac{24}{1{,}5} =\right) 16$	1 pont	
$S_6 = 16 \cdot \frac{1{,}5^6 - 1}{1{,}5 - 1} = 332{,}5$	1 pont	$16 + 24 + 36 + 54 + 81 +$ $+ 121{,}5 = 332{,}5$
Összesen:	**3 pont**	

12. első megoldás		
Összesen 36-féle dobás lehetséges (összes eset száma).	1 pont	
A kedvező dobások száma 6 (1-6, 3-6, 5-6, 6-5, 6-3, 6-1).	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{6}{36}\left(=\frac{1}{6}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12. második megoldás		
Lehet a piros kockán 6-os és a kék kockán páratlan szám, vagy fordítva.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy a piros kockával 6-ost dobunk $\frac{1}{6}$, annak a valószínűsége, hogy kékkel páratlan számot dobunk $\frac{1}{2}$.	1 pont	
A keresett valószínűség ezért $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
Az egyenlet bal oldalán álló törteket közös nevezőre hozva: $\frac{5x+40}{100}+\frac{4x-20}{100}=2$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az egyenlet mindkét oldalát megszorozza 100-zal.*
$5x + 40 + 4x - 20 = 200$	1 pont	
$9x + 20 = 200$	1 pont	
$x = 20$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
A téglalap rövidebb oldalának hossza (cm-ben mérve) legyen a, ekkor a másik oldal hossza $a + 48$. A feladat szövege alapján: $a(a + 48) = 2025$.	1 pont	$b(b - 48) = 2025$
$a^2 + 48a - 2025 = 0$	1 pont	$b^2 - 48b - 2025 = 0$
$a_1 = 27$	1 pont	$b_1 = 75$
$a_2 = -75$, ami nem megoldása a feladatnak.	1 pont	$b_2 = -27$, *nem megoldás*
A téglalap oldalainak hossza 27 cm és 75 cm.	1 pont	
A téglalap kerülete $(2\cdot27 + 2\cdot75 =)$ 204 cm.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
Az ABD derékszögű háromszögben $\cos ABD\sphericalangle = \frac{12}{20}$,	1 pont	
ahonnan $ABD\sphericalangle \approx 53{,}1°$,	1 pont	
így $\beta = (53{,}1° + 63° =)\ 116{,}1°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
Az ABD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm.	2 pont	$AD = 20 \cdot \sin 53{,}1°$
A DBC háromszögben koszinusztétellel: $CD^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 63°$ ($\approx 352{,}6$),	1 pont	
amiből $CD \approx 18{,}8$ cm.	1 pont	
Az ABD derékszögű háromszög területe (a két befogó szorzatának fele) $\frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ cm^2.	1 pont	$\frac{12 \cdot 20 \cdot \sin 53{,}1°}{2} \approx 96$ cm^2
(A DBC háromszög területe a trigonometrikus terület-képlettel) $\frac{20 \cdot 15 \cdot \sin 63°}{2} \approx$	1 pont	*(Héron-képlettel:)* $t = \sqrt{26{,}9 \cdot 6{,}9 \cdot 11{,}9 \cdot 8{,}1} \approx$
≈ 134 cm^2.	1 pont	
A négyszög területe így (96 + 134 =) 230 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

14. c)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Egy megfelelő ellenpélda (pl. egy olyan téglalap, amelyik nem négyzet).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

15. a)

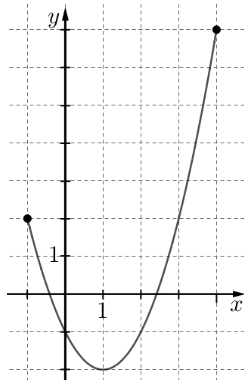
	f	g	h
van zérushelye	IGAZ	IGAZ	HAMIS
van maximuma	HAMIS	IGAZ	HAMIS
szig. mon. növekvő	IGAZ	HAMIS	IGAZ

5 pont

8 jó válasz 4, 7 jó válasz 3, 6 jó válasz 2, 5 jó válasz 1 pontot ér. 5-nél kevesebb jó válasz esetén nem jár pont.

Összesen: 5 pont

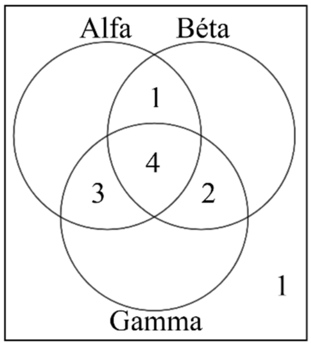
15. b)		
Megoldandó a $2^x + 1 = 1{,}25$ egyenlet.	1 pont	
$2^x = 0{,}25$	1 pont	
(Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = -2$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

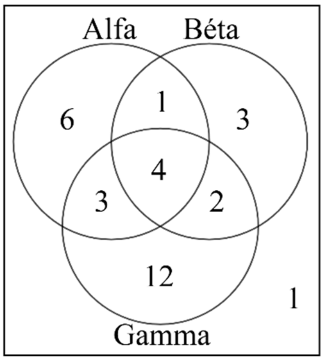
15. c)		
A vizsgázó másodfokú függvény grafikonját (normálparabola) ábrázolja	1 pont	
a [–1; 4] intervallumon,	1 pont	
melynek minimumhelye 1,	1 pont	
minimumértéke –2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a)		
A hívások átlagos ideje 2012-ben: (18 001 : 8045 ≈) 2,24 perc.	1 pont	
A hívások száma 2017-ben: (22 377 : 2,83 ≈) 7907 millió db.	1 pont	7894 *és* 7921 *közé eső bármilyen érték elfogadható.*
A hívások időtartama 2022-ben: (8577 · 3,31 ≈) 28 390 millió perc.	1 pont	28 347 *és* 28 432 *közé eső bármilyen érték elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
A szintenként kapható pontok egy számtani sorozat egymást követő tagjai: $a_4 = 630$, $a_7 = 990$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$a_7 - a_4 = 990 - 630 = 3d$,	1 pont	
innen $d = 120$.	1 pont	
$a_1 = a_4 - 3d = 270$	1 pont	
$S_{12} = \dfrac{2\cdot 270 + 11\cdot 120}{2}\cdot 12 =$	1 pont	270 + 390 + … + 1590 =
= 11 160 az összpontszáma annak a játékosnak, aki mind a 12 szintet teljesítette.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)		
(5 – 4 =) 1 főnek csak az Alfánál és a Bétánál, (6 – 4 =) 2 főnek csak a Bétánál és a Gammánál, (7 – 4 =) 3 főnek csak az Alfánál és a Gammánál volt már előfizetése.	2 pont	
(32 – 1 =) 31 főnek volt már legalább az egyik szolgáltatónál előfizetése.	1 pont	
Összesen 31 − (1 + 2 + 3 + 4) = 21 főnek volt előfizetése pontosan egy szolgáltatónál.	1 pont	
Ha x főnek csak a Bétánál volt már előfizetése, akkor csak az Alfánál $2x$, csak a Gammánál $4x$ főnek volt már előfizetése.	1 pont	
$x + 2x + 4x = 21$,	1 pont	
ahonnan $x = 3$.	1 pont	
A Bétánál (3 + 1 + 4 + 2 =) 10 főnek volt már előfizetése.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	



17. a)		
A felhasznált érmék lehetnek: – 3 db 100 Ft-os (és 0 db 50 Ft-os), – 2 db 100 Ft-os és 2 db 50 Ft-os, – 1 db 100 Ft-os és 4 db 50 Ft-os, – (0 db 100 Ft-os és) 6 db 50 Ft-os.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
3 db 100 Ft-ossal, illetve 6 db 50 Ft-ossal is csak 1-1-féleképpen lehet fizetni.	1 pont	
2 db 100 Ft-ossal és 2 db 50 Ft-ossal $\binom{4}{2}=$ 6-féleképpen lehet fizetni.	2 pont	
1 db 100 Ft-ossal és 4 db 50 Ft-ossal 5-féleképpen lehet fizetni.	1 pont	
Összesen (1 + 6 + 5 + 1 =) 13-féleképpen dobhatunk be az automatába 300 Ft-ot.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

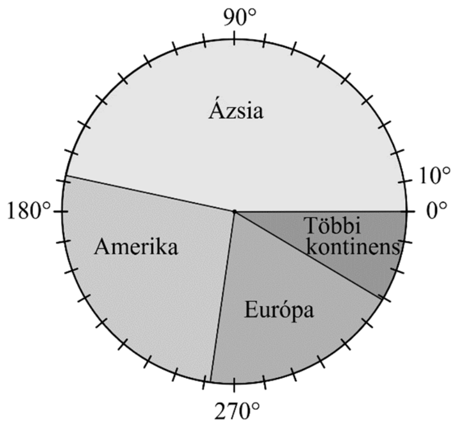
17. b) **első megoldás**		
Az összes (egyenlő valószínűségű) eset száma: $\binom{6}{3}=20$.	1 pont	*Egyesével választva, a sorrendet is figyelembe véve az összes eset száma* $6\cdot5\cdot4=120$.
A kedvező esetek száma: $\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}=12$.	2 pont	*A kedvező esetek száma* $\binom{3}{2}\cdot2\cdot4\cdot3=72$.
A keresett valószínűség: $\frac{12}{20}=0,6$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy elsőre tejcsokoládés, másodikra és harmadikra is étcsokoládés desszertet választ Balázs: $\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$.	2 pont	
Hasonlóan $\frac{1}{5}$ a valószínűsége annak, hogy másodikra, és szintén $\frac{1}{5}$, hogy harmadikra választ tejcsokoládés desszertet Balázs (és a másik két választott desszert étcsokoládés).	1 pont	$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$ $\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$
A keresett valószínűség: $3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c)		
A túróhenger sugara 9 mm, a félhenger sugara 10 mm.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A túróhenger térfogata: $9^2\pi \cdot 100 \approx 25\ 447$ mm^3.	1 pont	
A téglatest térfogata: $20 \cdot 10 \cdot 102 = 20\ 400$ mm^3.	1 pont	
A félhenger térfogata: $0{,}5 \cdot 10^2\pi \cdot 102 \approx 16\ 022$ mm^3.	1 pont	
A desszert térfogata: $20\ 400 + 16\ 022 = 36\ 422$ mm^3.	1 pont	
A csokoládé térfogata a desszert és a túróhenger térfogatának különbsége: $36\ 422 - 25\ 447 \approx 10\ 975$ mm^3,	1 pont	
azaz kb. 11 cm^3 csokoládé kerül egy desszertbe.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. a)		
8848 méter = 8,848 km	1 pont	
$p(8{,}848) = 101\,325 \cdot 10^{-0{,}054 \cdot 8{,}848} \approx$	1 pont	
$\approx 33\ 723$ Pa	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. b)		
Megoldandó a $60\ 000 = 101\,325 \cdot 10^{-0{,}054 \cdot h}$ egyenlet.	1 pont	
Innen $10^{-0{,}054 \cdot h} = \dfrac{60\ 000}{101\,325}$ ($\approx 0{,}592$).	1 pont	
Ebből $-0{,}054h = \lg 0{,}592$ ($\approx -0{,}2277$),	1 pont	
így $h \approx 4{,}22$ km,	1 pont	
azaz kerekítve 4200 méter magasságban lesz a légnyomás 60 000 Pa.	1 pont	*Ezt a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
Összesen 268 hegymászó szerepel a táblázatban.	1 pont	
Ebből az egyes kontinensekhez tartozó középponti szögek rendre: $\frac{125}{268}\cdot 360° \approx 168°$, $\frac{70}{268}\cdot 360° \approx 94°$, $\frac{50}{268}\cdot 360° \approx 67°$, $\frac{23}{268}\cdot 360° \approx 31°$.	2 pont	*1 vagy 2 hiba esetén 1 pont jár.*
Megfelelő kördiagram, jelmagyarázattal. 	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. d) **első megoldás**		
Az Ágnesből és Lászlóból álló hegymászópár és a másik három hegymászó 4!-féle sorrendben követheti egymást.	2 pont	
Ágnes és László minden ilyen esetben 2-féle sorrendben haladhatnak egymás után.	1 pont	
Így a lehetőségek száma $2\cdot 4! = 48$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d) **második megoldás**		
Ágnes és László 4-féle helyen (1-2, 2-3, 3-4, 4-5),	1 pont	
2-féle sorrendben haladhat egymás után.	1 pont	
A többiek 3!-féle sorrendben szerepelhetnek a sorban,	1 pont	
így a lehetőségek száma $4\cdot 2\cdot 3! = 48$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	